

NESTABILNOST RAYLEIGH-BENARDOVE KONVEKCIJE POD UTICAJEM VARIJACIJE TEMPERATURE NA GORNJEM ZIDU

INSTABILITY OF RAYLEIGH-BERNARD CONVECTION AFFECTED BY UPPER WALL TEMPERATURE VARIATION

Sadoon AYED*

Department of Mechanical Engineering, University of Technology, Iraq

<https://doi.org/10.24094/kgkh.020.51.1.111>

Ovaj rad analizira prinudnu Rayleigh-Benard-ovu konvekciju između dva paralelna zida. Donji zid se hladi a gornji zagreva prema periodičnom prostornom rasporedu. Proces se modelira uz pomoć Navier-Stokesovih jednačina, jednačine kontinuiteta i jednačine energije. Rešenje divergencijalnih jednačina dobijeno primenom pseudo spektralnog numeričkog postupka, kod koga je Fourier-Galerkin metod upotrebljen za diskretizaciju u homogenom smeru i Chebysev kolokacioni metod za diskretizaciju u nehomogenom smeru. Vremenska diskretizacija izvršena je uz pomoć Adams-Bashworthovog, dvo-koračnog, metoda drugog reda. Rezultati direktne numeričke simulacije predstavljeni su slikama polja vrtloga, toka i brzine za šest različita vremenska trenutka.

Ključne reči: Direktna numerička simulacija Navier-Stokesovih jednačina, Rayleigh-Bernardova konvekcija, Prantlov broj, analiza nelinearne stabilnosti

This paper represents the analysis of Rayleigh-Bernard convection between two parallel plates. Lower wall is being cooled while upper is heated according to periodic spatial distribution. This process has been modeled using Navier-Stokes equations, equation of continuity and energy equation. Solution of the differential equations has been obtained using pseudo spectral numeric method. For discretization in homogeneous direction, Fourier-Galerkin model has been used, while for discretization in inhomogeneous direction Chebyshev collocation method is applied. Time discretization has been performed using Adams-Bashworth two step method of second order. The results of numeric simulation have been presented by figures where vorticity fields, stream-function and velocity are shown for six different time steps.

Key words: direct numerical simulation of Navier-Stokes equations, Rayleigh-Bernard convection, Prandtl number, non-linear stability analysis

1. Uvod

Rayleigh-Benardova konvekcija predstavlja klasičan problem mehanike fluida kod koga viskozni fluid struji između dva paralelna zida pri čemu se gornji zid obično hladi a donji zagreva. Razlog pojave strujanja je gradijent temperature u vertikalnom smeru koji uzrokuje nestabilnost raspodele gustine u slojevima fluida usled čega nastaje kretanje. Rayleigh je opisao rešenje ovog problema za slučaj fluida u gravitacionom polju ograničenog, sa gornje i donje strane, horizontalnim zidovima sa konstantnim ali različitim temperaturama. Kao rezultat dobio je kritičnu vrednost bezdimenzionog parametra pri kome počinje strujanje fluida. Ovaj parameter naziva se Rayleigh-ov broj i određen je izrazom

$$Ra = \frac{g\beta(T_1 - T_2)H^3}{\alpha\nu} \quad (1)$$

gde je g gravitaciono ubrzanje, β koeficijent termičke ekspanzije, T_1 temperatura donjeg zida T_2 temperatura gornjeg zida, $2H$ is rastojanje između zidova, ν kinematska viskoznost i α koeficijent termičke difuzije. U gornjoj definiciji Rayleigh-ovog broja, osobine fluida važe za srednju temperature fluida $T_m = (T_1 + T_2)/2$, zbog toga što je ovo najbolja referentna temperature. U našem slučaju T_1 je funkcija promenljiva vremenom i u x -smeru, pa je tako i Ra number. Ra je bezdimenzionalni parameter koji predstavlja odnos potiska i difuzionih sila.

Vrednost kritičnog Rayleigh-ovog broja, prema teoriji linearne stabilnosti, je $Ra_c = 1708$ za kritičan talasni broj $q_c = 3,117$. Ispod ovog broja fluid počinje da se kreće i formira dvodimenzionalne vrtložne ćelije čiji je poprečni presek približan kvadratnom. Kako Ra raste ćelijski tok se značajno usložnjava. Dvo-dimenzionalne ćelije se razbijaju u trodimenzionalne ćelije koje imaju heksagonalni oblik kada se gledaju odozgo. Sa daljim povećanjem Ra ćelije se dele, postaju oscilatorne i na kraju turbulentne.

Analiza Rayleigh-Benardove konvekcije vrši se pod pretpostavkom malih temperaturnih razlika između zidova odnosno pod pretpostavkom da važi Oberbeck-Boussinesq aproksimacija. Ova aproksimacija podrazumeva da su sve osobine fluida konstantne osim gustine koju predstavljamo kao linearnu funkciju temperature

$$\rho = \rho_2[1 - \beta(T - T_2)] \quad (2)$$

ρ_2 je gustina fluida na gornjoj ploči, T je temperature fluida.

* Autor: 20028@uotechnology.edu.iq

U ovom radu razmatramo tok fluida za Rayleigh-ov broj ispod kritične vrednosti i talasni broj koji je veoma blizu kritične vrednosti. Numerička simulacija dobijena je upotrebom dvodimenzionalne Navier-Stokesove jednačine u obliku vrtlog-funkcija toka sa konstantnom temperaturom na donjem i prostornom modulacijom temperature na gornem zidu pri čemu

2. Matematički model

Primenom Navier-Stokes-ovih jednačina za nestišljivi fluid, Bousinesq-ove aproksimacije, jednačine kotinuiteta i jednačine energije dobijamo

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta \vec{v} = \rho_2 [1 - \beta(T - T_2)] \vec{g} \quad (3)$$

$$\vec{v} \cdot \nabla = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T = \alpha \Delta T \quad (5)$$

gde je $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + 0\vec{k}$ vektor brzine, $\vec{g} = -g\vec{k}$ gravitaciono ubrzanje, p pritisak, α koeficijent termičke difuzije i ν kinematska viskoznost. Granični uslovi su:

$$u(x, y = H, t) = 0, \quad u(x, y = -H, t) = 0 \quad (6)$$

$$v(x, y = H, t) = 0, \quad v(x, y = -H, t) = 0 \quad (7)$$

$$T(x, y = H, t) = T_2, \quad T(x, y = -H, t) = T_1 \quad (8)$$

Formulacija Navier-Stokes-ove jednačine u obliku vrtlog-funkcija toka ima oblik

$$\frac{\partial(\nabla \times \vec{v})}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)(\nabla \times \vec{v}) + \frac{1}{\rho} \nabla \times \nabla p - \nu \Delta(\nabla \times \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x} [1 - \beta(T - T_2)] g \vec{k} \quad (9)$$

pri čemu treba imati u vidu da je $\nabla \times \nabla p = 0$ i $\omega = \nabla \times v$, I da za ravan tok važi $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + 0\vec{k}$, i $\frac{\partial \chi}{\partial z} = 0$ za bilo koju vrednost χ , dobijamo sledeću jednačinu vrtloga

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} - \nu \Delta \vec{\omega} = \frac{\partial}{\partial x} [1 - \beta(T - T_2)] (-g) \vec{k} \quad (10)$$

Kako je $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \omega_z \vec{k}$ kod dvodimenzionalnog strujanja, nakon projekcije u z smeru jednačine dobija oblik

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \omega - \nu \Delta \omega = \frac{\partial}{\partial x} [1 - \beta(T - T_2)] g \quad (11)$$

gde je uvedena smena $\omega = \omega_z$. Problem je moguće učiniti bezdimenzionalnim uvođenjem karakterističnih skala: $L = H$ za dužinu, $T = \frac{H^2}{\alpha}$ za vreme, i $V = \frac{\alpha}{H}$ za brzinu.

Cilj upotrebe predhodnih skala je prevođenje fizičkog domena u bezdimenzioni računski domen pri čemu se menja i domen procesa ($0 \leq x^* \leq 2\pi$ i $-1 \leq y^* \leq 1$). Ovaj oblik je pogodan za primenu Fourier-Chebyshev-ljeve aproksimacije. Za prevođenje matematičkog modela (3) u bezdimenzionalni oblik potrebno je izvršiti sledeće transformacije koordinata.

$$\begin{aligned} x &= Lx^* = Hx^*, \quad y = Ly^* = Hy^* \\ \vec{v} &= V\vec{v}^* = \frac{\alpha}{H} \vec{v}^*, \quad t = Tt^* = \frac{H^2}{\alpha} t^* \\ \nabla &= \frac{1}{L} \nabla^* = \frac{1}{H} \nabla^*, \quad \Delta = \frac{1}{L^2} \Delta^* = \frac{1}{H^2} \Delta^* \\ \omega &= \frac{V}{L} \omega^* = \frac{\alpha}{H^2} \omega^*, \quad \psi = VL\psi^* = \frac{\alpha}{H} \psi^* \end{aligned} \quad (12)$$

Nakon transformacije koordinata jednačina vrtloga dobija oblik

$$\frac{\partial(\frac{V}{L}\omega^*)}{\partial(Tt^*)} + \left(V\vec{v}^* \cdot \frac{1}{L} \nabla^* \right) \frac{V}{L} \omega^* - \nu \frac{1}{L^2} \Delta^* \left(\frac{V}{L} \omega^* \right) = -\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x^*} [1 - \beta(T - T_2)] g \quad (13)$$

ili u sledećem obliku

$$\frac{V}{L} \frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + \frac{V^2}{L^2} (\vec{v}^* \cdot \nabla^*) \omega^* - \nu \frac{V}{L^3} \Delta^* \omega^* = -\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x^*} [1 - \beta(T - T_2)] g \quad (14)$$

$$\frac{\alpha^2}{H^4} \frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + \frac{\alpha^2}{H^4} (\vec{v}^* \cdot \nabla^*) \omega^* - \nu \frac{\alpha}{H^4} \Delta^* \omega^* = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x^*} \beta(T - T_2) g \quad (15)$$

Ako predhodnu jednačinu pomnožimo sa $\frac{H^4}{\alpha^2}$ doibijamo

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + (\vec{v}^* \cdot \nabla^*) \omega^* - \frac{\nu}{\alpha} \Delta^* \omega^* = \frac{H^3 \beta g (T_1 - T_2)}{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{T - T_2}{T_1 - T_2} \right) \quad (16)$$

ili

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + (\vec{v}^* \cdot \nabla^*) \omega^* - \frac{\nu}{\alpha} \Delta^* \omega^* = \frac{\nu H^3 \beta g (T_1 - T_2)}{\alpha \nu} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{T - T_2}{T_1 - T_2} \right) \quad (17)$$

Bezdimenzionalni oblik temperature dobijamo na osnovu izraza

$$\theta^* = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} \quad (18)$$

Osim Rayleigh-ovog broja određenog izrazom (1), u predhodnim jednačinama figuriše i Prandtl-ov broj koji predstavlja odnos kinematske viskoznosti i koeficijenta termičke.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (19)$$

Nakon zamene izraza (19) i (18) u (17) dobijamo

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + (\vec{v}^* \cdot \nabla^*) \omega^* - Pr \Delta^* \omega^* = Pr Ra \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \quad (20)$$

Umesto jednačine kontinuiteta koristimo definiciju vrtloga

$$\vec{\omega} = -\Delta \vec{\psi} \quad (21)$$

Nakon skalarnog proizvoda sa k dobija se

$$v + \Delta \psi = \frac{\nu}{L} \omega^* + \frac{1}{L^2} \Delta^* \mathbf{V} L \psi^* = 0 \quad (22)$$

a nakon množenja sa $\frac{L}{\nu}$ dobija se gornja jednačina u bezdimenzionalnom obliku

$$\omega^* + \Delta^* \psi^* = 0 \quad (23)$$

Jednačina energetskog bilansa transformiše se na sledeći način

$$\frac{\partial (T - T_2)}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) (T - T_2) = \alpha \Delta (T - T_2) \quad (24)$$

nakon deljenja sa $T_1 - T_2$, dobija se

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} + (\vec{v} \cdot \nabla) \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} = \alpha \Delta \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} \quad (25)$$

ili

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta^* + (\vec{v} \cdot \nabla) \theta^* = \alpha \Delta \theta^* \quad (26)$$

Primenom izraza za transformaciju kordinata dobija se

$$\frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t} \theta^* + (\mathbf{V} \vec{v}^* \cdot \frac{1}{L} \nabla^*) \theta^* = \alpha \frac{1}{L^2} \Delta^* \theta^* \quad (27)$$

odnosno

$$\frac{\alpha}{H^2} \frac{\partial}{\partial t} \theta^* + \left(\frac{\alpha}{H} \vec{v}^* \cdot \frac{1}{H} \nabla^* \right) \theta^* = \alpha \frac{1}{H^2} \Delta^* \theta^* \quad (28)$$

i nakon deljenja sa $\frac{\alpha}{H^2}$ dobijamo jednačinu energije u bezdimenzionalnom obliku

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + (\vec{v}^* \cdot \nabla^*) \theta^* = \Delta^* \theta^* \quad (29)$$

Nakon primenjenih transformacija kordinata matematički model dobija oblik

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + (\vec{v}^* \cdot \nabla^*) \omega^* &= Pr \Delta^* \omega^* + Pr Ra \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \\ \omega^* + \Delta^* \psi^* &= 0 \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + (\vec{v}^* \cdot \nabla^*) \theta^* &= \Delta^* \theta^* \end{aligned} \quad (30)$$

pri čemu su granični uslovi

$$\theta^* = 0, \quad \psi^* = 0, \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} = 0, \quad \text{at } y^* = 1 \quad (31)$$

$$\theta^* = 1, \quad \psi^* = 0, \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} = 0, \quad \text{at } y^* = -1 \quad (32)$$

$$D = \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R} | 0 \leq x^* \leq 2\pi, -1 \leq y^* \leq 1\} \quad (33)$$

Dva granična uslova odnose se na funkciju toka a nema graničnih uslova za vrtlog. Početni uslovi definisani su sa

$$\psi^*(x, y, 0) = \psi_0^*(x, y), \theta^*(x, y, 0) = \theta_0^*(x, y) \quad (34)$$

3. Numeričko rešenje

Jednačine (30) u razvijenom obliku imaju oblik

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} &= Pr Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} + Pr \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \\ \omega + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (35)$$

Radi jednostavnosti u predhodnim jednačinama zanemarene su zvezdice koje označavaju da se radi o transformisanim koordinatama.

Diskretizaciju diferencijalnih jednačina (35) u x smeru vršimo primenom trigonometrijskih polinoma a u y smeru primenom Chebisev-ljevih polinoma. Tako je x smer doskretizovan na ekvidistantnim tačkama sa intervalom $\Delta x = 2\pi/N$ a y domen na Gauss-Lobatto-Chebisev-ljevim tačkama definisanih izrazom

$$y_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right) \quad (36)$$

za $0 \leq j \leq N$, gee je N broj diskretizacionih tačaka u y smeru. Drugim rečima za diskretizaciju domena u homogenom x smeru primenjen Fourier-Galerkin metod a za diskretizaciju u nehomogenom y smeru primenjen je Chebyshev-ljev metod kolokacije.

Razvijanjem vrtloga, funkcije toka i temperature u Fourier-ov red sa konačnim brojem elemenata dobijamo izraze

$$\omega(x, y, t) = \sum_{k=-K}^K \hat{\omega}_k(y, t) e^{ikx} \quad (37)$$

$$\psi(x, y, t) = \sum_{k=-K}^K \hat{\psi}_k(y, t) e^{ikx} \quad (38)$$

$$\theta(x, y, t) = \sum_{k=-K}^K \hat{\theta}_k(y, t) e^{ikx} \quad (39)$$

gde je $i = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica, k je talasni broj, a $\hat{\omega}_k(y, t)$, $\hat{\psi}_k(y, t)$ i $\hat{\theta}_k(y, t)$ su Fourier-ovi koeficijenti za vrtlog, funkciju toka i temperaturu. Da bi razvoj bio periodičan talasni broj bira se iz skupa celih brojeva, $k \in \mathbb{Z}$. Analogno aproksimiramo nelinearne članove

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, y, t) = \sum_{k=-K}^K \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right]_k(y, t) e^{ikx} \quad (40)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}(x, y, t) = \sum_{k=-K}^K \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right]_k(y, t) e^{ikx} \quad (41)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, y, t) = \sum_{k=-K}^K \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_k(y, t) e^{ikx} \quad (42)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, y, t) = \sum_{k=-K}^K \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_k(y, t) e^{ikx} \quad (43)$$

Zamenom jednačina (37-41) u jedinačinama matematičkog modela (35) dobijaju se jednačine ostatka

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=-K}^K \hat{\omega}_k(y, t) e^{ikx} + \sum_{k=-K}^K \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right]_k(y, t) e^{ikx} - \sum_{k=-K}^K \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right]_k(y, t) e^{ikx} - Pr Ra \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=-K}^K \hat{\theta}_k(y, t) e^{ikx} - \\ Pr \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \sum_{k=-K}^K \hat{\omega}_k(y, t) e^{ikx} \neq 0 \end{aligned} \quad (44)$$

$$\sum_{k=-K}^K \hat{\omega}_k(y, t) e^{ikx} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \sum_{k=-K}^K \hat{\psi}_k(y, t) e^{ikx} \neq 0 \quad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=-K}^K \hat{\theta}_k(y, t) e^{ikx} + \sum_{k=-K}^K \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_k(y, t) e^{ikx} - \sum_{k=-K}^K \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_k(y, t) e^{ikx} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \sum_{k=-K}^K \hat{\theta}_k(y, t) e^{ikx} \quad (46)$$

Primenom Galerkin-ovog metoda na predhodne jednačine (44-46) dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\omega}_k(y, t)}{\partial t} + \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right]_k(y, t) - \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right]_k(y, t) + Pr Ra ik \hat{\theta}_k(y, t) &= Pr \left(-k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \hat{\omega}_k(y, t) \\ \hat{\omega}_k(y, t) + \left(-k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \hat{\psi}_k(y, t) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}_k(y, t)}{\partial t} + \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_k (y, t) - \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_k (y, t) = \left(-k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \hat{\theta}_k(y, t)$$

$$l = k = 0, 1, \dots, N/2 \quad (47)$$

Primenjujući Chebisev-ljev metod kolokacije na predhodni sistem jednačina dobijamo

$$\frac{\partial \hat{\omega}_k(y_j, t)}{\partial t} + \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_k (y_j, t) - \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_k (y_j, t) + Pr Ra ik \hat{\theta}_k(y_j, t) = Pr \left(-k^2 + \sum_{l=0}^N d_{j,l}^{(2)} \right) \hat{\omega}_k(y_j, t)$$

$$\hat{\omega}_k(y_j, t) + \left(-k^2 + \sum_{l=0}^N d_{j,l}^{(2)} \right) \hat{\psi}_k(y_j, t) = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}_k(y, t)}{\partial t} + \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_k (y_j, t) - \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_k (y_j, t) = \left(-k^2 + \sum_{l=0}^N d_{j,l}^{(2)} \right) \hat{\theta}_k(y_j, t)$$

$$l = k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}, j = 1, \dots, N - 1 \quad (48)$$

U predhodnim jednačinama $d_{j,l}^{(2)}$ su elementi Chebisev-ljeve diferencijacione matrice drugog reda. Za diskretizaciju u vremenu koristimo Adams-Bashwohrt-ovu semi implicitnu metodu konačnih razlika sa tačnošću drugog reda.

Sistem jednačina (48) zajedno sa graničnim uslovima (31-33) i inicijalnim uslovima (34) rešava se numerički. Sistem je predstavljen $2(N + 1) \times 2(N + 1)$ matricnom jednačinom u tri vremenska nivoa. Nerilearni članovi (40-43) određuju se primenom pseudospektralnih tehnika.

4. Početni i granični uslovi

Početni uslovi numeričke simulacije predstavljani su izrazima

$$\omega(x, y, t = 0) = 0, \quad \psi(x, y, 0) = 0, \quad \theta(x, y, 0) = 0$$

$$\forall (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 2\pi, -1 \leq y \leq 1\} \quad (49)$$

Temperatura na gornjoj ploči raste postepeno prema jednačini

$$\theta(x, y = 1, t) = (1 + \delta_m \sin q_{m1} x + \delta_m \cos q_{m2} x) \sin \omega t = 0, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2\omega}$$

$$\theta(x, y = 1, t) = (1 + \delta_m \sin q_{m1} x + \delta_m \cos q_{m2} x), \quad \frac{\pi}{2\omega} < t \quad (50)$$

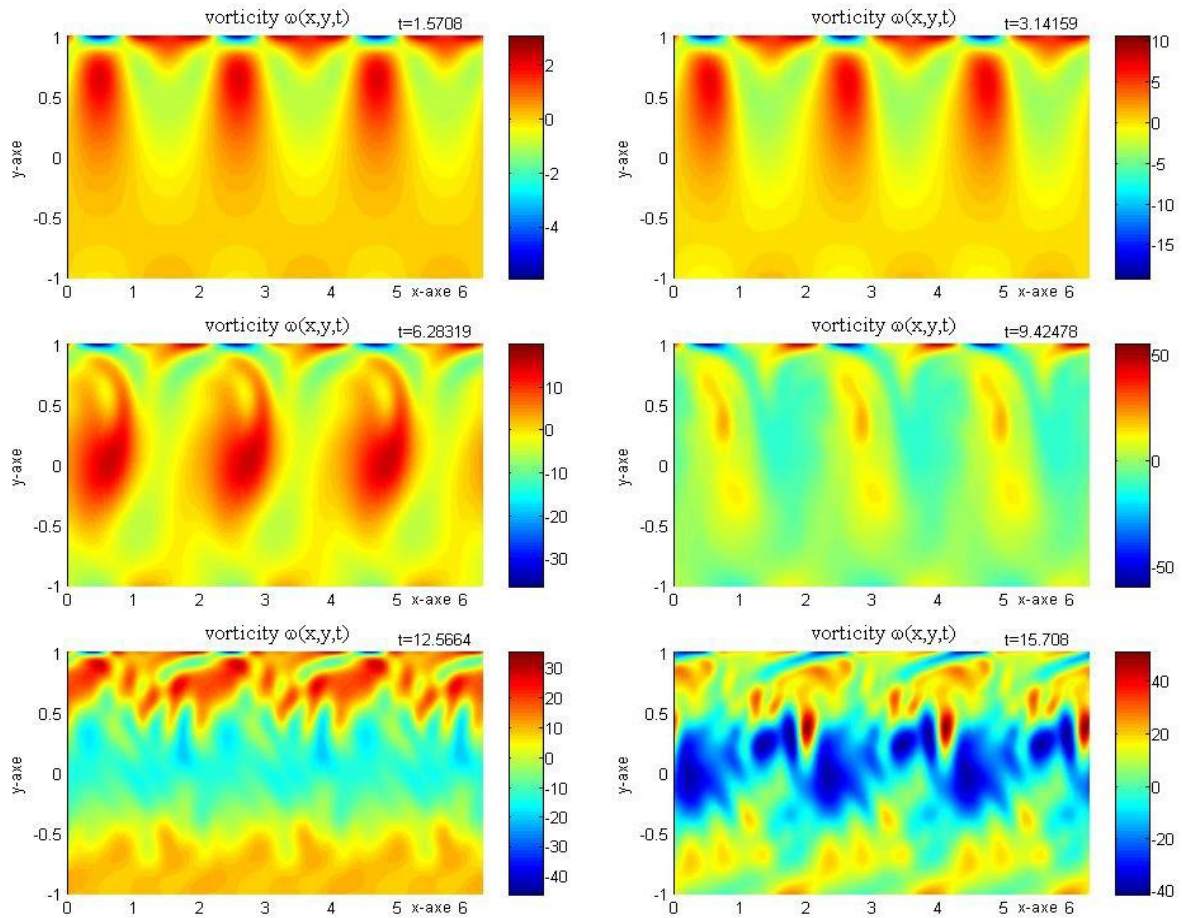
Na osnovu jednačine (50) možemo zaključiti da temperature na gornjoj ploči nije konstantna u x smeru. Ona zavisi od talasnih modulacija (q_{m1}, q_{m2}), amplitude (δ_m) i frekvencije ω . Rayleigh-ov broj Ra je mera prosečnog gradijenta temperature, dok je dodatna prostorna modulacija određena malom amplitudom δ_m i talasnim brojevima q_{m1} i q_{m2} . U odsustvu prinude ($\delta_m = 0$), konvektivne ćelije razvijaju se za Ra veći od kritičnog (Ra_c). Početak konvekcije može se predstaviti paraboličnom linearnom krivom (neutralnom krivom) u parametarskom prostoru sa apcisosom Ra i ordinatom q . Neutralna kriva ima svoj minimum na kordinatama $q_c = 3,117$ i $Ra_c = 1707,8$.

U slučaju prinude, tj. za $\delta_m \neq 0$, konvekcija je neizbežna za svku konačnu vrednost Ra . U najjednostavnijem slučaju javlja se u vidu prinudnih vrtložnih ćelija (forced rolls) sa talasnim brojem q_m . Rezultat rada je direktna numerička simulacija prinudnih vrtložnih ćelija i njihove stabilnosti u prisustvu prinude male amplitude (reda veličine $\delta_m = 0,01$) i odnosa prinudnog i kritičnog talasnog broja $\frac{q_{m1}}{q_c} \approx 1,92$ ($q_{m1} = 6$) i $\frac{q_{m2}}{q_c} \approx 0,96$ ($q_{m2} = 3$). Stabilnost prinudnih vrtložnih ćelija čvrsto zavisi od odnosa prinudnog i kritičnog talasnog broja. Ra varira vremenski i prostorno kao posledice promene temperature na gornjem zidu koja se odvija prema jednačini (50). Temperaturna razlika $T_1 - T_2$ iz jednačine (1) takođe varira sa vremenom i prostorom. Kao rezultat numeričke simulacije pratimo promenu funkcije toka, vrtloga, brzine i temperaturnog polja u periodu $0 \leq t \leq 5\pi$ za $\omega = 1$. Vrednost $Ra=1000$ je podkritična, vrednost prvog talasnog broja $q_{m1} = 6$ je nadkritična a drugog podkritična. Vrednosti ostalih parametara su $Pr = 7$, $\Delta t = \pi/200$, $\delta_m = 0,01$. Broj čvorova u x smeru je 512 a broj Chebisev-ljevih kolokacionih čviriva u y smeru 128 ($K = 32$).

5. Rezultati numeričke simulacije

Rezultati simulacije pokazuju da se konvekcija javlja u vidu ustaljenih dvodimenzionalnih vrtložnih ćelija. Zagrevanom fluidu kome odgovara $Ra > Ra_c$ stabilni obarasci se pojavljuju u opsegu talasnih brojeva koji su približno grupisani u okolini kritičnog talasnog broja q_c . U okviru stabilnog opsega dimenzije ćelija ne odgovaraju kritičnoj vrednosti talasnog broja q_c vać odgovaraju prostornom i vremenskom rasporedu graničnih uslova. Stabilan opseg je ograničen sa obe strane nestabilnostima. Ove nestabilnosti teže da promene talasni broj vrtložnih ćelija ali da ne promene njihov oblik. Pošto dobijene ćelije imaju talasni broj koji odstupa od stabilnog opsega javlja se nestabilnost koja pomera njihove

dimenzije ka kritičnim vrednostima. Kako se Ra povećava vrtložne ćelije postaju nestabilne i struktura konvekcije konvergira obrascu veoma složenog prostornog i vremenskog rasporeda.



Slika 1. Grafički prikaz bezdimenzionalnog vrtložnog polja kod prinudne Rayleigh-Benard-ove konvekcije

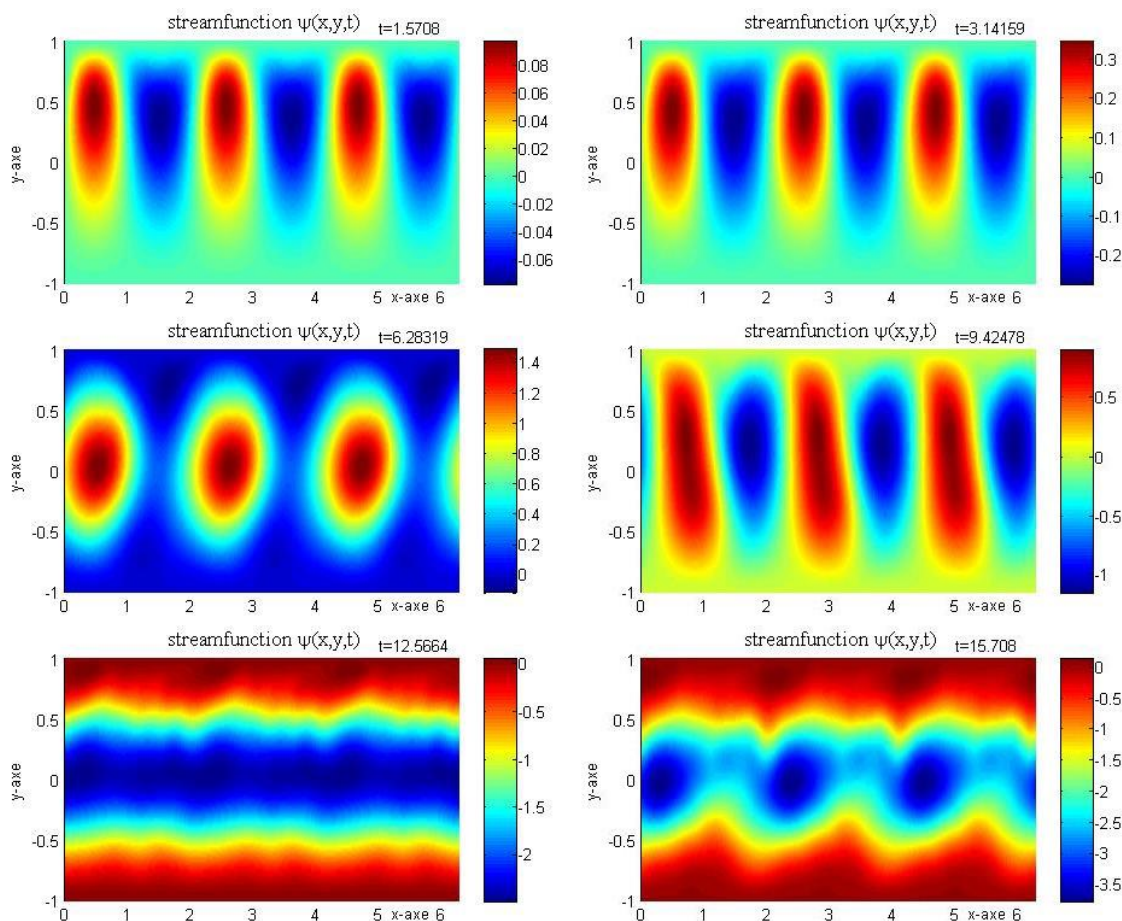
Na slici 1. prikazana je rezultat numeričke simulacije vrtložnog polja primenom dvodimenzionalnih Navier-Stokes-ovih jednačina u funkciji vrtloga i funkcije toka i primenom jednačine energije sa već opisanim početnim i graničnim uslovima. Broj vrtložnih ćelija koje možemo primetiti slici dobijenoj za $t = \pi/2$ odgovara manjem talasnom broju graničnih temperaturnih uslova ($q_{m2} = 3$). Intenzitet vrtloga u ovom trenutku kreće se u granicama od -6 do 3 a koncentracija je u gornjoj polovini sloja. Ovo je trenutak kada temperatura gornjeg zida dobija svoju konačnu vrednost sa modulacijom u x smeru. U sledećem trenutku, za $t = \pi$, uprkos vremenski konstantnoj vrednosti temperature, dolazi do povećanja inteziteta vrtloga pa se on kreće u granicama od -19 do 11. Oblik vrtložnih ćelija ostao je gotovo nepromenjen. U narednom trenutku, za $t = 2\pi$ intenzitet vrtloga se kreće se u granicama od -35 do 18. Ovde se već primećuje mala deformacija vrtložnih ćelija. Ova deformacija se vremenom povećava pa je u narednom trenutku $t = 3\pi$ već vidno приметna. Opseg vrednosti vrtložnog polja za ovaj trenutak iznosi od -55 do 53. Usled sve prisutnijih nestabilnosti struktura vrtložnog polja u narednom trenutku ($t = 4\pi$) postaje već veoma kompleksna uz приметno koncentrisanje uz gornji zid. Granične vrednosti inteziteta su neznatno smanjene i kreću se od -45 do 35. I napokon u poslednjem trenutku koji posmatramo vrtložno polje je postao već приметno nestabilno uz neznatnu promenu graničnih vrednosti vrtloga (od -40 do 50).

Rezultati simulacije brzine u x smeru dati su na slici 3. Ova komponenta brzine zadržava svoj prostorni raspored do momenta $t = \pi$ uz konstantno povećanje inteziteta. Za to vreme gornji zid, sa svojom prostornom modulacijom predstavlja izvor impulsa. Nakon isteka ovog perioda ekstremne vrednosti pomeraju se ka sredini sloja. Polje dobija podeljenu strukturu gde u gornjoj polovini ima negativnu vrednost a u donjoj pozitivnu. Tendencija se nastavlja do poslednjeg trenutka ispitivanja $t = \pi$ uz nastavak povećanja inteziteta i konstantno usložnjavanje obrasca vrtložnih ćelija.

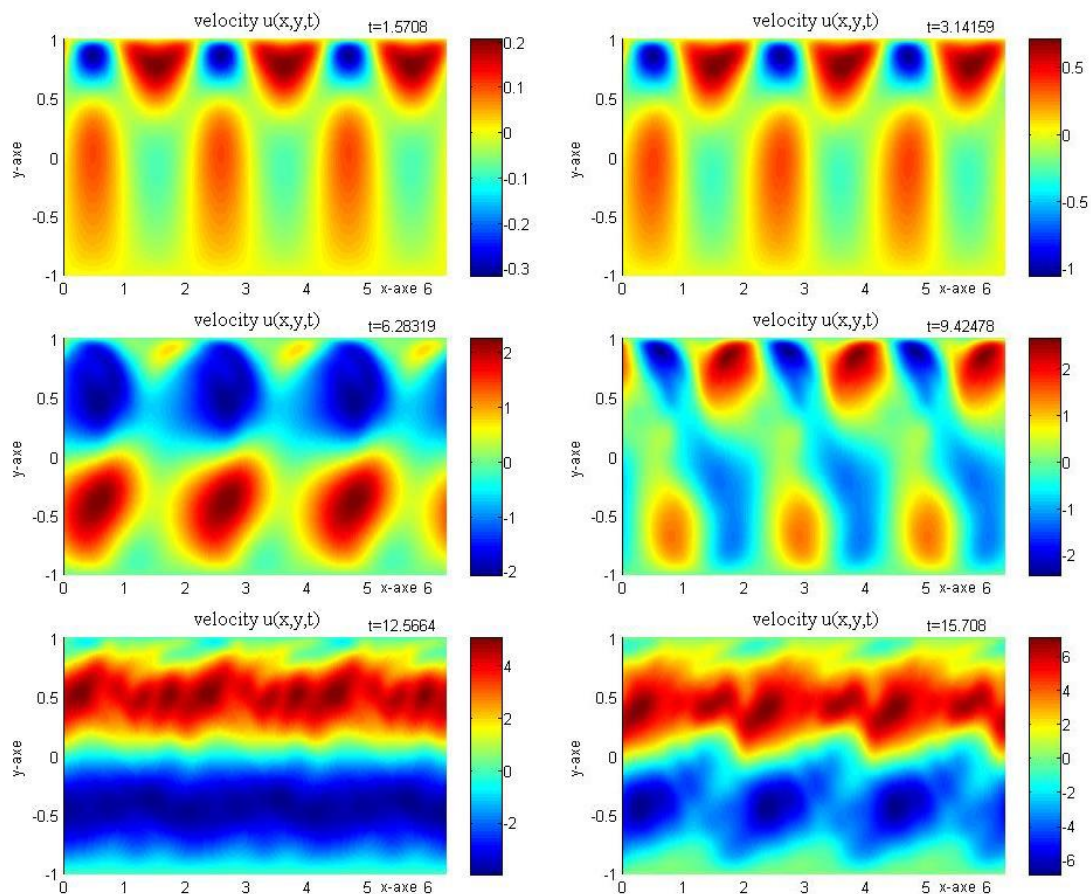
Već je poznato [1,11] da zagrevanje donjeg zida uz istovremeno hlađenje gornjeg nije u ravnoteži usled čega dolazi do povećanja kinetičke i termalne energije fluida. Ovde vidimo da obrnuti slučaj, kada se zagreva gornji a hladi donji zid ne imati sličan efekat.

Na slici 4. prikazana promena komponente brzine u y smeru. Intenzitet ove komponente u početku raste a nakon toga ima fluktuirajuću vrednost. Do momenta $t = \pi$ struktura ovog polja ostaje nepromenjena. Nakon toga počinju da se primećuju efekti nestabilnosti do momenta $t = 4\pi$ kada polje postaje neuređeno.

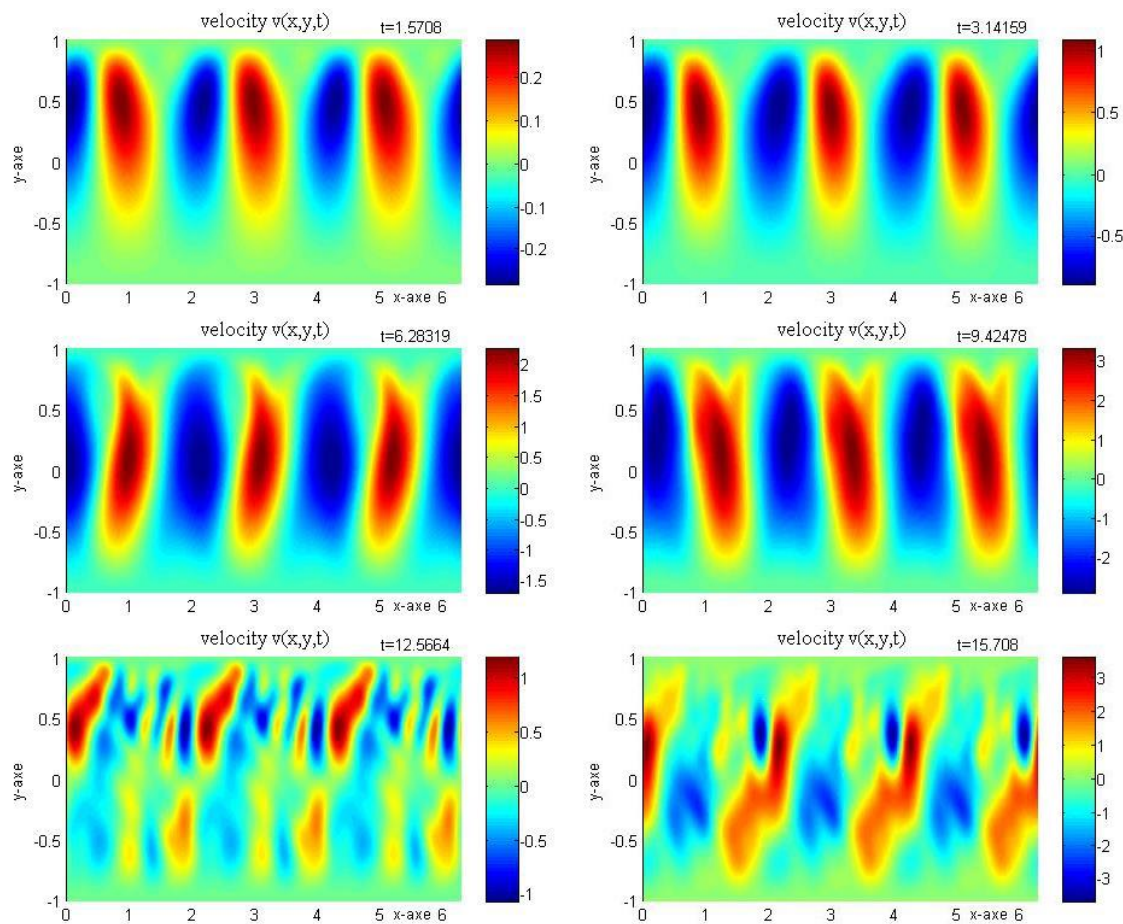
Rezultati istog numeričkog postupka za funkciju toka dati su na slici 2. Ekstremne vrednosti ove funkcije povećavaju se i za vreme i nakon završetka perioda povećavanja vrednosti temperature na gornjoj ploči sve do $t = 2\pi$. Prostorni raspored funkcije toka ostaje ne promenjen do trenutka $t = 3\pi$, nakon čega postaje sve nestabilniji.



Slika 2. Grafički prikaz bezdimenzionalne funkcije toka kod prinudne Rayleigh-Benard-ove konvekcije



Slika 3. Grafički prikaz bezdimenzionalnog polja brzine u x smeru kod Rayleigh-Benard-ove konvekcije



Slika 4. Grafički prikaz bezdimenzionalnog polja brzine u y smeru kod Rayleigh-Benard-ove konvekcije

Rezultati simulacije pokazuju da se pod uticajem periodičnih graničnih uslova na gornjoj ploči javlja prinudna Rayleigh-Benard-ova konvekcija. U početku, do momenta $t = \pi$ uspostavljaju se stabilni obrasci vrtložnih ćelija čiji prostorni raspored odgovara jednoj od talasnih vrednosti graničnih uslova. Nakon isteka perioda stabilnosti javljaju se nestabilnosti za vrednost broja Ra mnogo manjoj od kritične vrednosti. Da li će process Rayleigh-Benard-ove konvekcije biti ureden ili haotičan zavisi od vrednosti parametara Pr , δ_m , q_{m1} i q_{m2} .

6. Zaključak

U ovom radu ispitana je prinudna Rayleigh-Bénard-ova konvekcija kod koje je, osim temperaturnog gradijenta primenjena modulacija na gornjem zidu fluida sa amplitudom δ_m i dva različita talasna broja q_{m1} i q_{m2} . Dok kod konvencionalnog slučaja Rayleigh-Bénard-ove konvekcije obrazac vrtložnih ćelija postje nestabilan za vrednosti kritičnog broja Ra uz talasni broj q_c , prinudna konvekcija ima vrednost talasnog broja q_{m2} i postoji za bilo koju vrednost Ra . Na vrtložne ćelije deluju različiti mehanizmi destabilizacije. Njihov intenzitet zavisi od odnosa q_{m1}/q_c i q_{m2}/q_c . U posmatranom slučaju ove vrednosti su $\frac{q_{m1}}{q_c} \approx 1,92$ ($q_{m1} = 6$) i $\frac{q_{m2}}{q_c} \approx 0,96$ ($q_{m2} = 3$).

Literatura

- [1] **Jovanović Miloš M., Živković Dragan S., Nikodijević Jelena D.,** *Rayleigh-Benard Convective Instability in the presence of Temperature Variation at the lower wall*, University of Niš, The Faculty of Mechanical Engineering, Serbia.
- [2] **Marcello Lappa,** *Thermal Convection, Patterns, Evolution and Stability*, Naples, Italy, 2009.
- [3] **Lloyd N. Trefethen,** *Spectral Methods in Matlab*, Oxford University, England, 2000.
- [4] **Seok-Ki Choi, Seong-O Kim,** *Computation of a turbulent Rayleigh-Benard convection with the elliptic-blending second-moment closure*, Korea Atomic Energy Research Institute, Fast Breeder Reactor Development Group, 150-1 Deokjin-dong Yuseong-gu, Daejeon, 305-353, Republic of Korea, 2008.
- [5] **Anna Ebert, Christian Reasagk, Andre Thess,** *Experimental study of temperature distribution and local heat flux for turbulent Rayleigh-Benard convection of air in a long rectangular enclosure*, Ilmenau University of Technolog, Department of Mechanical Engineering, Ilmenau, Germany, 2008.

- [6] **Bairi A., Laraqi N., J.M. Garcia de Maria**, *Numerical and experimental study of natural convection in tilted parallel-pipedic cavities for large Rayleigh numbers*, University of Paris, Department of Heat transfer, Ville d' Avray, France, Universidad Politecnica de Madrid, Departamento de Fisica Aplicada, Madrid, Spain, 2006.
- [7] **Dalila Akrou, Mouloud Tribeche and Djamel Kalache**, *A Theoretical and Numerical Study of Thermosolutal Convection: Stability of a Salinity Gradient Solar Pond*.
- [8] **Nourollahi M., Farhadi M., Kurosh S.**, *Numerical Study of Mixed Convection and Entropy Generation in the Poiseuille-Benard Channel in Different Angles*, Babol University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering, Babol, Islamic Republic, Iran, 2010.
- [9] **Suhas V. Patankar**, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, University of Minnesota, USA, 1980.
- [10] **Versteeg H. K. & Malalasekera W.**, *An introduction to computational fluid dynamics, The finite volume method*, Longman Scientific & Technical, 2005.
- [11] **Ayed Sadoon, Gradimir Ilić**, 2016. *Instability of Rayleigh Benaed convection affected by lower wall temperture variation*, Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering 14 (2), 179-197