BIBLID 0350-1426 (1999) 28:2-3 p. 61-66 UDK 697.13

Izračunavanje geometrijskih faktora oblika površine prostorije

Mr Dimitrije Lilić, dipl. inž., Vojnotehnički institut VJ, Beograd

Deo uniformnog difuznog zračenja jedne površine koje pada na neku drugu površinu definisan je kao geometrijski faktor oblika između tih površina. U zatvorenom prostoru – prostoriji, razmena toplote zračenjem obavlja se između unutrašnjih površina. U radu su izložene osnovne teorijske postavke za izračunavanje geometrijskih faktora oblika. Za model prostoriju, sa difuzno emitujućim i reflektujućim unutrašnjim površinama, formiranim matematičkim modelom i računarskim programom, izračunati su geometrijski faktori oblika i tabelarno prikazani za nekoliko dimenziono različitih praznih prostorija.

Ključne reči: zračenje; difuzno zračenje; difuzna refleksija; geometrijski faktor oblika; ugaoni faktor; faktor pogleda; prostorija; zatvoren prostor

Key words: radiation; diffuse radiation; diffuse reflection; geometric shape factor; angle factor; view factor; room; enclosure

Uvod

Prenos toplote u prostorijama vrši se istovremeno kombinacijom zračenja, konvekcije i kondukcije. Pri tome razmena toplote zračenjem dešava se tako što se zračenje sa neke od površina prenosi do drugih površina na kojima se delom reflektuje, mnogo puta sa delimičnom apsorpcijom na svakoj od površina na koje dospeva.

Ako se očekuje da emitovana i reflektovana energija varira po površini, ona može biti podeljena na manje površine duž kojih emitovana i reflektovana energija ne varira tako mnogo, tako da se može smatrati da imaju difuzni i uniformni distributivni karakter.

Crno telo predstavlja standard sa kojim se realni apsorberi mogu upoređivati. Stvarne, realne površine emituju i apsorbuju manje od crnog tela i nazvane su necrne. Specijalni slučaj ovih površina, koje se najčešće pretpostavljaju u proračunima, imaju emisione karakteristike nezavisne od talasnih dužina, i nazivaju se sivim površinama.

Lambertov zakon opisuje difuzno zračenje koje predstavlja aproksimaciju za mnoge stvarne procese zračenja i refleksije, posebno za hrapave nemetalne površine. Najveći broj analiza zračenja baziran je na pretpostavci sivog – difuznog zračenja i refleksije.

Uobičajeno je da početno razmatranje razmene toplote zračenjem između dve površine obuhvati razmatranje specijalnog slučaja, odnosno kada se površine smatraju crnim. U tom slučaju površine su idealni apsorberi, i proces razmene energije je uprošćen jer ne sadrži proces refleksije. Takođe, sve crne površine emituju energiju u difuznom obliku, kada intenzitet zračenja od površine ne zavisi od pravca emisije. To uprošćava izračunavanje količine zračenja koje dospeva na drugu površinu.

Deo uniformnog difuznog zračenja jedne površine koje dospeva na neku drugu površinu definisan je geometrijskim faktorom oblika između te dve površine i on zavisi od njihovih dimenzija i njihove međusobne geometrijske orijentacije. U literaturi, ovaj faktor se javlja pod nazivima: faktor intercepcije (interception), faktor pogleda (view), faktor konfiguracije (configuration), faktor oblika (shape), ugaoni (angle) faktor i sl. [1, 2].

Razmatranje geometrijske zavisnosti za crne površine ima širi značaj i može se primeniti na sva zračenja koja imaju uniforman difuzioni karakter zračenja.

Cilj rada je da se za model prostoriju, sa difuzno emitujućim i reflektujućim unutrašnjim površinama, formira matematički model i računarski program za izračunavanje geometrijskih faktora oblika.

2. Model prostorije

Za prikazani model prazne prostorije [3], na slici 1, sa difuzno emitujućim i reflektujućim unutrašnjim površinama, označene su površine pravougaonog prizmatičnog prostora; 4 zida, pod, tavanica i zastakljena površina (prozor) na spoljašnjem zidu. U savremenoj arhitekturi, prostorije mogu biti izvdene sa delimično zastakljenim spoljašnjim zidom kao i sa spoljašnjim zidom zastakljenim u celini. U tehnici klimatizacije i grejanja najčešći oblik razmatranja toplotnih bilansa odnosi se na navedene individualne površine.

3. Osnovne teorijske postavke matematičkog modela

3.1. Razmena toplote zračenjem između dve elementarne površine

Razmena toplote zračenjem između dve elementarne crne površine šematski je prikazana na slici 2.

Elementarne površine dA_1 i dA_2 su izotermne, na temperaturama T_1 i T_2, i međusobno proizvoljno orijentisane. S predstavlja rastojanje između dve elementarne površine, dok β_1 i β_2 predstavljaju uglove između normala elementarnih površina i pravca S.

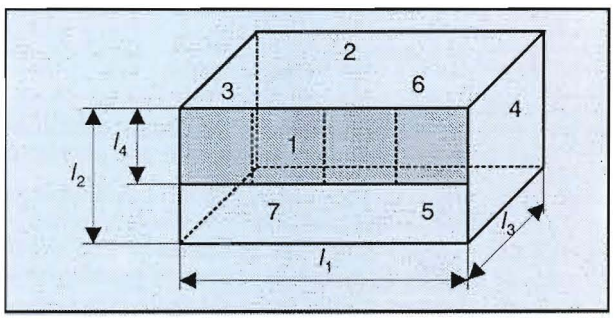
Neto energija u jedinici vremena razmenjena između crnih elementarnih površina dA_1 i dA_2 duž puta S ima izraz:

$$d^2Q'_{dA_1 \Leftrightarrow dA_2} = \sigma\,(T_1^4 - T_2^4)\cdot \frac{\cos\beta_1\,\cos\beta_2}{\pi\,S^2}\,dA_1\,dA_2 \qquad (1)$$

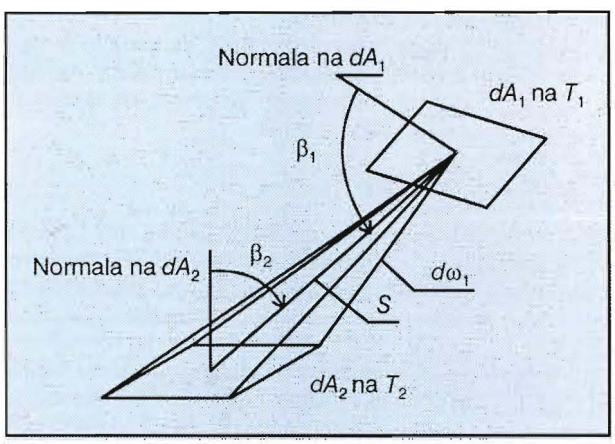
gde (') označava da se razmena vrši u jednom pravcu.

Deo zračenja koje napušta elementarnu površinu dA_1 i dospeva na dA_2 definisan je kao geometrijski faktor oblika $dF_{dA1-dA2}$, i može se napisati u obliku:

$$dF_{dA_1-dA_2} = \frac{\cos\beta_1\cos\beta_2}{\pi\,S^2}\,dA_2 \qquad (2)$$



Slika 1. Geometrijska konfiguracija osnovnog oblika prostorije; l_1 – širina prostorije, l_2 – visina prostorije, l_3 – dubina (dužina prostorije), l_4 – visina zastakljene površine – prozora, 1 – zastakljena površina – prozor, 2 – suprotan zid, 3, 4 – levi, desni zid, 5 – pod, 6 – tavanica, 7 – spoljašnji zid

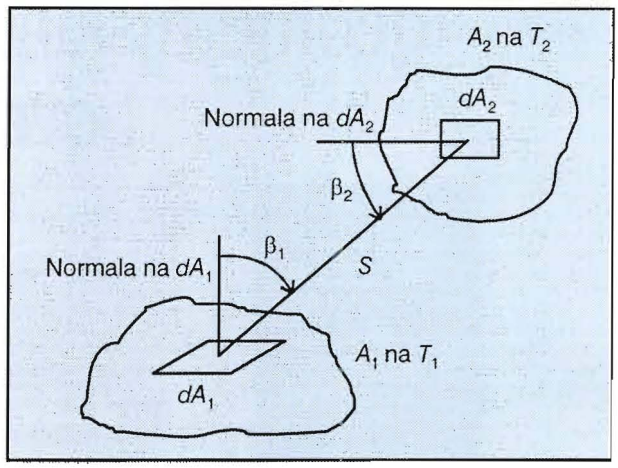


Slika 2. Razmena toplote zračenjem između dve crne elementarne površine

3.2. Geometrijski faktor oblika i razmena energije zračenjem između dve površine

3.2.1. Geometrijski faktor oblika za dve konačne površine

Na slici 3 je geometrijski prikaz razmene energije zračenjem između dve konačne površine.



Slika 3. Geometrijski prikaz razmene energije zračenjem između dve konačne površine

Po definiciji, geometrijski faktor oblika F_{1-2} je deo zračenja emitovanog sa površine A_1 koje pada na površinu A_2. Totalna energija koja napušta crnu površinu A_1 je $\sigma T_1{}^4 A_1$, dok je A_1 izotermna površina na temperaturi T_1. Zračenje koje napušta elementarnu površinu dA_1 i pada na elementarnu površinu dA_2, a na osnovu izraza (1), može se napisati:

$$d^2Q'_{dA_1-dA_2} = \sigma\,T_1^4\,\frac{\cos\beta_1\cos\beta_2}{\pi\,S^2}\,dA_1\,dA_2 \qquad (3)$$

Ako se ovaj izraz integrali po A_1 i A_2, dobija se energija zračenja koja napušta površinu A_1 i pada na površinu A_2. Geometrijski faktor oblika se tada može izračunati kao:

$$F_{1-2} = \frac{\int_{A_1}\int_{A_2}(\sigma\,T_1^4\cos\beta_1\cos\beta_2/\pi\,S^2)\,dA_2\,dA_1}{\pi\,S^2} \qquad (4)$$

odnosno:

$$F_{1-2} = \frac{1}{A_1}\int_{A_1}\int_{A_2}\frac{\cos\beta_1\cos\beta_2}{\pi\,S^2}\,dA_2\,dA_1 \qquad (5)$$

To se može napisati u obliku geometrijskog faktora koji uključuje elementarne površine:

$$F_{1-2} = \frac{1}{A_1}\int_{A_1}\int_{A_2}dF_{dA_1-dA_2}\,dA_1 =$$

$$= \frac{1}{A_1}\int_{A_1}dF_{dA_1-A_2}\,dA_1 \qquad (6)$$

Istovetnim postupkom za izračunavanje izraza (5) može se naći geometrijski faktor oblika u odnosu na površinu A_2 ka površini A_1:

$$F_{2-1} = \frac{1}{A_2}\int_{A_1}\int_{A_2}\frac{\cos\beta_1\cos\beta_2}{\pi\,S^2}\,dA_2\,dA_1 \qquad (7)$$

3.2.2. Reciprocitet geometrijskih faktora oblika konačnih površina

Dvostruki integrali izraženi u (5) i (7) su identični. Odatle proizilazi da u ovom slučaju važi princip reciprociteta, odnosno:

$$A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1} \tag{8}$$

Za geometrijski faktor između elementarne površine dA_1 i konačne površine A_2 princip reciprociteta ima oblik:

$$A_2 dF_{A_2-dA_1} = dA_1 F_{dA_1-A_2} \tag{9}$$

Dalje relacije između geometrijskih faktora mogu se naći iz izraza (6) i principa reciprociteta datih izrazima (8) i (9), pa je:

$$F_{2-1} = \frac{A_1}{A_2} F_{1-2} = \frac{A_1}{A_2}\frac{1}{A_1}\int_{A_1} F_{dA_1-A_2} dA_1 =$$

$$= \frac{1}{A_2}\int_{A_1} dF_{A_2-dA_1} dA_2 = \int_{A_1} dF_{A_2-dA_1} \tag{10}$$

3.2.3. Razmena toplote zračenjem između konačnih površina

Energija zračenja od površine A_1 koja pada na površinu A_2, po definiciji geometrijskog faktora je:

$$Q_{1-2} = \sigma T_1^4 A_1 F_{1-2} \tag{11}$$

Isto važi za zračenje od površine A_2 koje pada na površinu A_1:

$$Q_{2-1} = \sigma T_2^4 A_2 F_{2-1} \tag{12}$$

Neto razmenjena energija od A_1 prema A_2 je:

$$Q_{1\Leftrightarrow 2} = Q_{1-2} - Q_{2-1} = \sigma T_1^4 A_1 F_{1-2} - \sigma T_2^4 A_2 F_{2-1} \tag{13}$$

Korišćenjem izraza (8) neto razmenjena energija zračenjem može biti napisana u dvostrukoj formi:

$$Q_{1\Leftrightarrow 2} = \sigma (T_1^4 - T_2^4) A_1 F_{1-2} \tag{14}$$

$$Q_{1\Leftrightarrow 2} = \sigma (T_1^4 - T_2^4) A_2 F_{2-1} \tag{15}$$

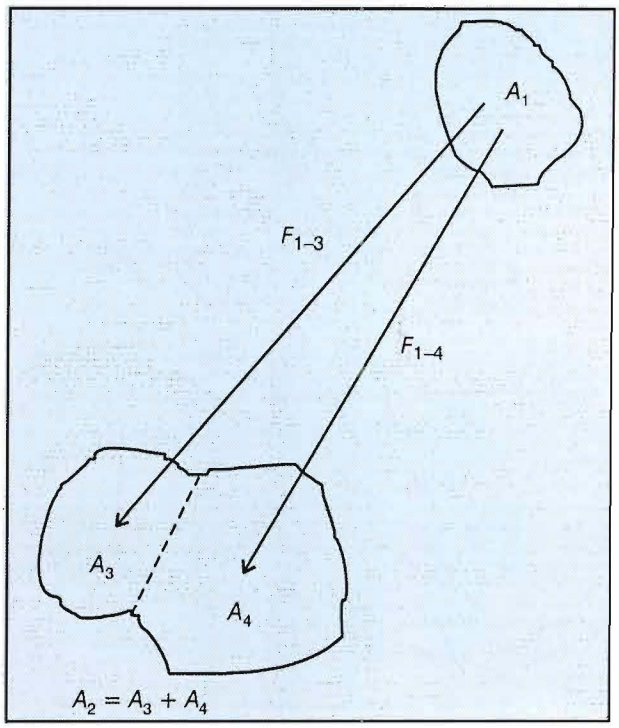
3.2.4. Izračunavanje geometrijskog faktora oblika za parove površina

Zbog često teškog direktnog izračunavanja geometrijskog faktora oblika po integralnoj definiciji, za mnoge geometrijske slučajeve moguće je na osnovu poznatih relacija kraćim putem doći do geometrijskih faktora.

U slučaju prikazanom na slici 4, izotermska crna površina A_1 razmenjuje energiju sa drugom površinom A_2. Geometrijski faktor oblika F_{1-2} je deo totalne energije koju emituje površina A_1 koja pada na površinu A_2. Ako je površina A_2 podeljena na dve površine A_3 i A_4, deo totalne energije koja odlazi od površine A_1 i pada na površinu A_3 i deo koji odlazi od površine A_1 i pada na površinu A_4 mora biti u zbiru jednak F_{1-2}. To se može napisati u obliku:

$$F_{1-2} = F_{1-(3+4)} = F_{1-3} + F_{1-4} \tag{16}$$

Kada su F_{1-2} i F_{1-4} poznati, a treba naći željeni geometrijski faktor F_{3-1}, onda iz:



Slika 4. Razmena energije zračenjem između dve površine kada je jedna površina podeljena

$$F_{1-3} = F_{1-2} - F_{1-4} \tag{17}$$

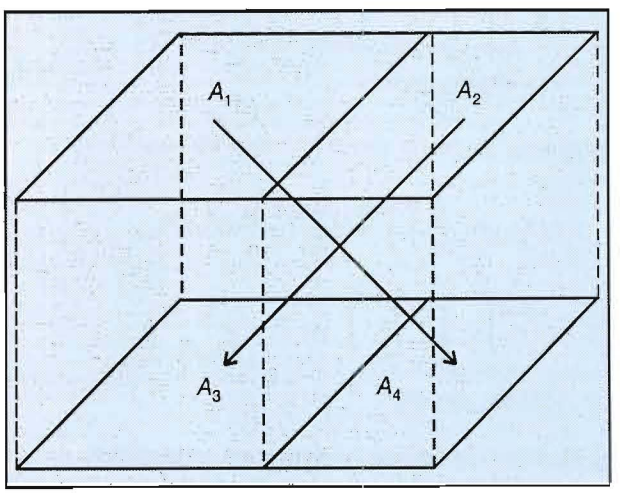
i upotrebom principa reciprociteta, izraz (8), sledi:

$$F_{3-1} = \frac{A_1}{A_3} F_{1-3} = \frac{A_1}{A_3}(F_{1-2} - F_{1-} \tag{18}$$

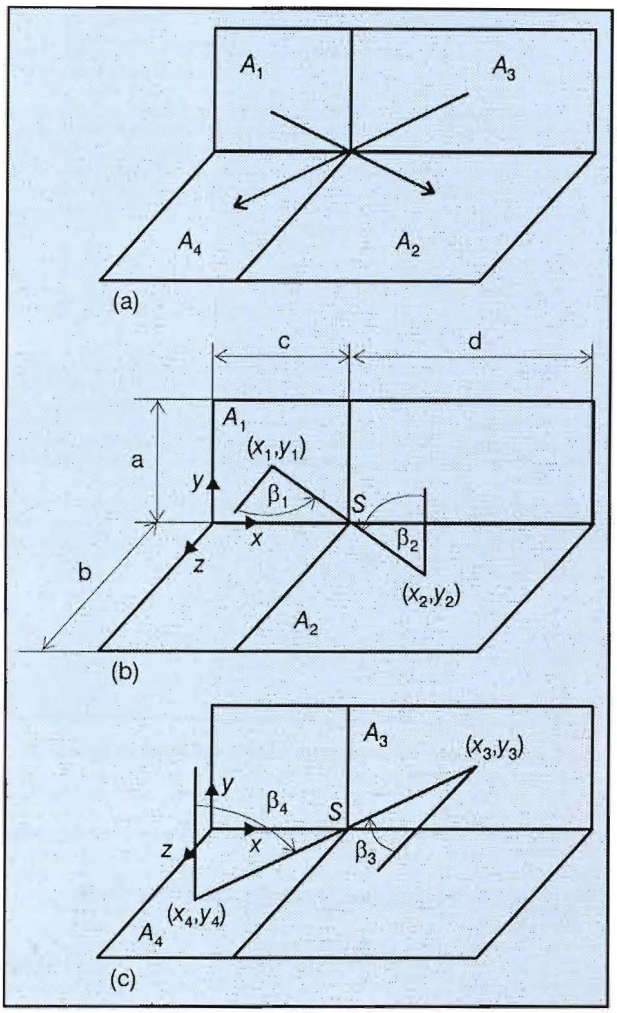
Dalje, za slučaj prikazan na slici 5, kada postoji geometrijska simetrija, sa slike je evidentno da je $A_2 = A_4$ i $F_{2-3} = F_{4-1}$, tako da je $A_2 F_{2-3} = A_4 F_{4-1}$. Iz reciprociteta sledi $A_4 F_{4-1} = A_1 F_{1-4}$. Odatle se dobija relacija:

$$A_2 F_{2-3} = A_1 F_{1-4} \tag{19}$$

Na slici 6, dve pravougaone površine pod pravim uglom koje imaju zajedničku ivicu, podeljene su na po dve površine. Prikazane površine su nejednakih veličina, tako da ne postoji očevidna simetrija.



Slika 5. Geometrijski prikaz principa reciprociteta kada postoji geometrijska simetrija



Slika 6. Geometrijski prikaz principa reciprociteta za dijagonalno suprotne parove pravougaonika za dve površine pod pravim uglom sa zajedničkom ivicom

Prema osnovnoj definiciji, jednačina (5) i sa slike 6 (b), gde je $S_2 = (x_2 - x_1)^2 + y^2_1 + z^2_2$, cos $\beta_1 = z_2$ /S i cos $\beta_2 = y_1$ /S, dobija se izraz:

$$A_1 F_{1-2} = \frac{1}{\pi} \int_{x_1=0}^{c} \int_{y_1=0}^{a} \int_{x_2=c}^{c+d} \int_{z_2=0}^{b} \frac{y_1 z_2}{\left[(x_2 - x_1)^2 + y_1^2 + z_2^2\right]^2} \cdot dz_2\, dx_2\, dy_1\, dx_1 \qquad (20)$$

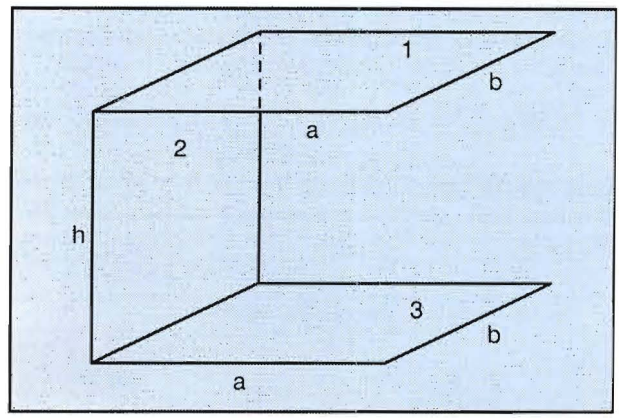
Istovetno, saglasno slici 6 (c) može se pokazati da je:

$$A_3 F_{3-4} = \frac{1}{\pi} \int_{A_3} \int_{A_4} \frac{\cos\beta_3 \cos\beta_4}{S^2} dA_4\, dA_3 = \frac{1}{\pi} \int_{x_3=c}^{c+d} \int_{y_3=0}^{a} \int_{x_4=0}^{c} \int_{z_4=0}^{b} \frac{y_3 z_4}{\left[(x_3 - x_4)^2 + y_3^2 + z_4^2\right]^2} \cdot dz_4\, dx_4\, dy_3\, dx_3 \qquad (21)$$

Veštačkom zamenom integracionih promenljivih x_1, y_1, x_2 i z_2 za x_4, y_3 x_3 i z_4 proizilazi da su integrali, izrazi (20) i (21) identični, što dokazuje da u ovom slučaju važi relacija:

$$A_1 F_{1-2} = A_3 F_{3-4} \qquad (22)$$

Za dobijanje geometrijskih faktora oblika, za površine sa međusobnim položajem prikazanim na slici 7, u inženjerskoj praksi se koriste već izrađeni odgovarajući dijagrami [2, 4, 6].



Slika 7. Geometrijski prikaz izračunavanja geometrijskog faktora oblika za površine sa prikazanim međusobnim položajem

Međutim, zbog nedovoljne preciznosti za relevantna razmatranja, izračunavanje geometrijskog faktora oblika za dve identične, paralelne i direktno suprotstavljene površine, a prema slici 7, može se vršiti prema izrazu [5]:

$$F_{1-3} = \frac{2}{ab\pi} \left[\begin{array}{l} b\sqrt{h^2+a^2}\,\tan^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+h^2}} + \\ + a\sqrt{b^2+h^2}\,\tan^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{b^2+h^2}} \\ - bh\tan^{-1}\dfrac{b}{h} - ah\tan^{-1}\dfrac{a}{h} - \\ - \dfrac{h^2}{2}\ln\dfrac{(h^2+a^2+b^2)h^2}{(a^2+h^2)(b^2+h^2)} \end{array} \right] \qquad (23)$$

Izračunavanje geometrijskog faktora oblika za pravougaone površine, iste dužine, sa jednom zajedničkom ivicom i pod međusobno pravim uglom, a prema slici 7, može se vršiti prema izrazu [5]:

$$F_{2-3} = \frac{1}{\pi} \left[\begin{array}{l} \tan^{-1}\dfrac{b}{h} + \dfrac{a}{h}\tan^{-1}\dfrac{b}{a} - \\ - \dfrac{\sqrt{a^2+h^2}}{h}\tan^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+h^2}} \\ + \dfrac{h}{4b}\ln\dfrac{(a^2+b^2+h^2)h^2}{(a^2+h^2)(b^2+h^2)} + \\ + \dfrac{a^2}{4bh}\ln\dfrac{(a^2+b^2+h^2)a^2}{(a^2+b^2)(a^2+h^2)} \\ - \dfrac{b}{4h}\ln\dfrac{(a^2+b^2+h^2)b}{(a^2+b^2)(h^2+b^2)} \end{array} \right] \qquad (24)$$

3.3. Geometrijski faktori oblika za zatvoren prostor

Za prostroriju, odnosno zatvoren prostor od ukupno k površina, obeležene sa i i j (i – se odnosi na onu koja

Tabela 1. Geometrijski faktori oblika za $l_1 : l_2 : l_3 : l_4 = 1 : 1 : 1 : 1$

	Prozor	Suprot. zid	Levi zid	Desni zid	Pod	Plafon	Spoljni zid
F i–j	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6	i = 7
j = 1	0	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,000
j = 2	0,200	0	0,200	0,200	0,200	0,200	0,000
j = 3	0,200	0,200	0	0,200	0,200	0,200	0,000
j = 4	0,200	0,200	0,200	0	0,200	0,200	0,000
j = 5	0,200	0,200	0,200	0,200	0	0,200	0,000
j = 6	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0	0,000
j = 7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0
Σ	1	1	1	1	1	1	0

Tabela 2. Geometrijski faktori oblika za $l_1 : l_2 : l_3 : l_4 = 1 : 1 : 1 : 0,5$

	Prozor	Suprot. zid	Levi zid	Desni zid	Pod	Plafon	Spoljni zid
F i–j	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6	i = 7
j = 1	0	0,100	0,100	0,100	0,054	0,146	0,000
j = 2	0,200	0	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200
j = 3	0,200	0,200	0	0,200	0,200	0,200	0,200
j = 4	0,200	0,200	0,200	0	0,200	0,200	0,200
j = 5	0,108	0,200	0,200	0,200	0	0,200	0,292
j = 6	0,292	0,200	0,200	0,200	0,200	0	0,108
j = 7	0,000	0,100	0,100	0,100	0,146	0,054	0
Σ	1	1	1	1	1	1	1

Tabela 3. Geometrijski faktori oblika za $l_1 : l_2 : l_3 : l_4 = 3,08 : 2,8 : 4,6 : 2,8$

	Prozor	Suprot. zid	Levi zid	Desni zid	Pod	Plafon	Spoljni zid
F i–j	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6	i = 7
j = 1	0	0,103	0,143	0,143	0,143	0,143	0,000
j = 2	0,103	0	0,143	0,143	0,143	0,143	0,000
j = 3	0,214	0,214	0	0,236	0,217	0,217	0,000
j = 4	0,214	0,214	0,236	0	0,217	0,217	0,000
j = 5	0,234	0,234	0,239	0,239	0	0,280	0,000
j = 6	0,234	0,234	0,239	0,239	0,280	0	0,000
j = 7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0
Σ	1	1	1	1	1	1	0

Tabela 4. Geometrijski faktori oblika za $l_1 : l_2 : l_3 : l_4 = 3,08 : 2,8 : 4,6 : 1,8$

	Prozor	Suprot. zid	Levi zid	Desni zid	Pod	Plafon	Spoljni zid
F i–j	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6	i = 7
j = 1	0	0,067	0,094	0,094	0,066	0,113	0,000
j = 2	0,104	0	0,143	0,143	0,143	0,143	0,101
j = 3	0,219	0,214	0	0,236	0,217	0,217	0,205
j = 4	0,219	0,214	0,236	0	0,217	0,217	0,205
j = 5	0,168	0,234	0,239	0,239	0	0,280	0,353
j = 6	0,290	0,234	0,239	0,239	0,280	0	0,135
j = 7	0,000	0,036	0,049	0,049	0,077	0,029	0
Σ	1	1	1	1	1	1	1

zrači, a sa j površina na koju se posmatra zračenje), za i–tu površinu važi relacija:

$$\sum_{j=1}^{k} F_{i-j} = 1 \qquad (25)$$

4. Izračunavanje geometrijskih faktora oblika

Prema prikazanim teorijskim postavkama, formiran je matematički model i program za računar za izračunavanje geometrijskih faktora oblika za osnovni oblik prostorije.

Za zatvoren prostor, sa k ravnih površina potrebno je izračunati N geometrijskih faktora. Odnos između broja geometrijskih faktora N i broja strana k nekog zatvorenog prostora dat je izrazom:

$$N = k^2 - \sum_{j=1}^{k} j = k(k-1) \qquad (26)$$

Za usvojeni osnovni model prostorije sa $k = 7$ površina, broj potrebnih i izračunatih geometrijskih faktora oblika iznosi $N = 42$.

U slučaju kada je $l_4 = l_2$, odnosno kada nema spoljašnjeg zida, tj. kada je cela spoljašnja površina zastakljena, $k = 6$, $N = 30$.

U priloženim tabelama izračunati su geometrijski faktori oblika zaokruženi na decimalna mesta, za neke relativne odnose dimenzija (proporcije) prostorije, $l_1 : l_2 : l_3 : l_4$.

5. Zaključak

Formirani matematički model i program za izračunavanje geometrijskih faktora oblika za osnovni model prostorije omogućava da se, pored dobijanja numeričkih vrednosti, vrše analize uticaja promene dimenzija prostorije na raspodelu zračenja koje ima uniformni difuzni karakter, po unutrašnjim površinama prostorije. Model omogućava analize i izračunavanje geometrijskih faktora oblika i za kombinovane promene dimenzija prostorije, kako u relativnim odnosima, tako i u apsolutnim iznosima dimenzija.

Literatura

[1] **Siegel and Howel:** *Thermal Radiation Heat Transfer,* McGrow-Hill Book Company, New York, 1972.

[2] ***: *Fundamentals Handbook,* ASHRAE, New York, 1985.

[3] **Todorović, B., M. Šiljak:** *Calculative Determination of Distribution of Solar Radiation Transmitted through Windows,* Proceedings of the CLIMA 2000 World Congress on Heating, Ventilating and Air-Conditioning, Copenhagen, 25–30 August 1985.

[4] **McAdams, W. H.:** *Heat transmission,* McGraw-Hill Book Co., New York, 1954.

[5] **Eckert, E., R. Drake:** *Heat and Mass Transfer,* McGraw-Hill Book Co., New York, 1959.

[6] **Kozić, Đ., V. Bekavac, B. Vasiljević:** *Priručnik iz termodinamike,* Mašinski fakultet, Beograd, 1979.

kgh

Dimitrije Lilić, M. Sc.

ROOM SURFACES GEOMETRIC SHAPE FACTOR CALCULATION

Summary

The fraction of the diffusive and uniformly distributed radiation leaving one surface that reaches another surface is defined as the geometric shape factor between two surfaces. In an enclosure - room - radiation exchange occurs between internal surfaces. In the paper the basic theoretical relations for estimating geometric shape factors are presented. For the model room, with diffusive emitted and reflected internal surfaces, by formed mathematical model implemented in a computer code, the geometric shape factors are calculated for the empty rooms of different shapes and sizes and tabularly presented in this paper.