ПРОСТИРАЊЕ ТОПЛОТЕ ПРИ СТРУЈАЊУ ФИЛМА ТЕЧНОСТИ НИЗ ВЕРТИКАЛНУ ПОВРШИНУ

HEAT TRANSFER OF A FLUID FILM FLOW ON A VERTICAL SURFACE

М. Тодоровић, Ф. Коси, Г. Колдић, Р. Миленковић,
Пољопривредни факултет, Београд

У раду је разматран проблем нестационарног простирања топлоте при хлађењу течног флуида који се налази у затвореном простору, филмом течности који струји низ спољне површине вертикалних зидова који ограничавају тај простор. Изложен је и аналитички модел за одређивање конвективне размене топлоте са унутрашње и спољне стране вертикалних зидова, као и прорачун промене температурског поља унутрашњег хлађеног флуида. Добијене вредности се квалитативно слажу са прелиминарним мерењима која су вршена на изграђеном систему односно објекту.

The problem of a unsteady heat transfer for liquid fluid cooling in a cavity employing a liquid film flowing along a vertical wall enclosing the cavity is analyzed. An analitycal model of convecitive heat transfer on an internal and external wall surface estimation and the internal fluid temperature field prediction are also given. The obtained results are in a reasonable agreement with the preliminary measurements performed on a real object.

Кључне речи: *филм течности; вертикална површина; хлађење; нестационарно температурско поље; коефицијенти прелаза топлоте*
Key words: *liquid film; vertical surface; cooling; unsteady temperature field; heat transport coefficients*

1. Увод

У инжењерској пракси често се сусрећемо са проблемом за које у литератури не налазимо одговарајућа решења, па лично знање и способност сагледавања физике проблема условљава квалитет идејних и конструкционих решења. Због економичности у пројектовању и извођењу постројења, избегавају се скупа експериментална истраживања, па се методе прорачуна усавршавају имајући у виду квалитативне и квантитативне податке са већ изведених постројења.

Струјање филма течности на вертикалним и хоризонталним површинама се често среће у техничко-технолошким системима размене топлоте. То је разлог бројних испитивања која су спроведена за различите геометрије. Предложен је низ једначина за израчунавање меродавних вредности коефицијената прелаза топлоте у таквим системима. Међутим, међусобне разлике резултата једначина које се могу наћи у литератури често су веће и од 100%. Ово су уочили и сами аутори покушавајући једновремено да нађу објашњења овако великих разлика. До заједничког става и прикладног објашњења за све карактеристичне проблеме се још није дошло, те су неопходна систематска испитивања различитих геометрија у ширем подручју карактеристичних режима кретања филма течности и температурских режима.

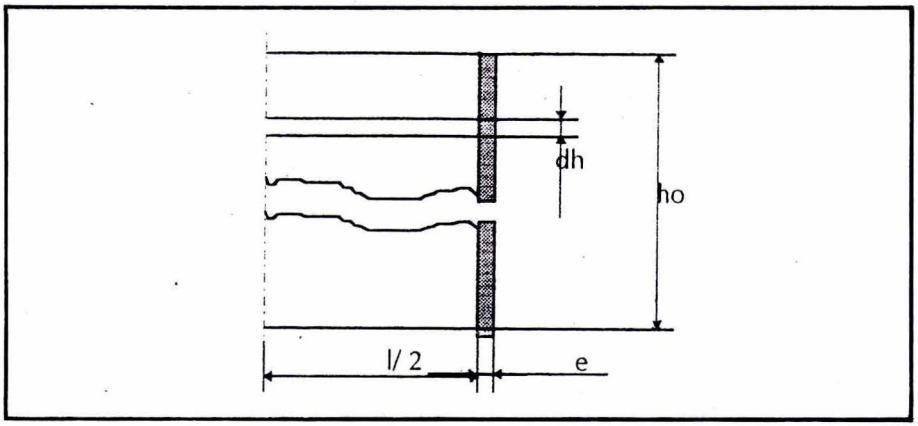
Феномени простирања топлоте при струјању филма течности (без промене фазе) преко површина различитог облика чести су у прехрамбеној индустрији, посебно у технолошким поступцима прераде воћа и поврћа, где хлађење чини прву фазу у процесу конзервирања производа. При томе, основни проблем је технолошки захтев да се процес хлађења до температуре којом се обезбеђује безбедно складиштење изведе за што краће време.

2. Физички и математички модел

За одређивање расхладног капацитета система–постројења, као и детаљно пројектовање и контролу рада система за расподелу радног расхладног флуида – воде у посматраном систему хлађења, кључни проблем је одређивање температурског поља производа. Као резултат врло интензивног хлађења филмом воде која опструјава производ, у материјалу се успоставља нестационарно температурско поље са великим градијентима температуре. Ови градијенти зависе од особина производа, параметара преноса топлоте на површини и интензитета хлађења.

За опис овог процеса, важно је приметити да се интензивним хлађењем површине релативно брзо одводи топлота из слоја производа (у посматраном случају сока) уз површину зида – кутије, те се температура у овом слоју брзо мења – опада, и приближава температури спољашњег расхладног филма воде. За то време, у унутрашњости температура опада много спорије, а у самом средишту може да буде још увек готово непромењена. Из ових рзлога је неопходно при прорачуну оптерећења за хлађење за меродавну температуру производа узети средњу масену температуру производа. При том се средњом масеном температуром производа одређује она од вредности температура, прелазне температурске расподеле, која би се равномерно успоставила у производу ако би се производ држао одређено време у адијабатским условима.

За одређивање расхладног капацитета, веома је важно утврдити што је могуће тачније температурско поље у производу, односно у течном материјалу – соку. Кључни проблем његовог одређивања је утврђивање резултата интеракције провођења топлоте уз успостављање градијената температуре у близини унутрашње површине зида, деловања гравитационе



Слика 1. Струјање филма течности низ вертикалан зид

силе на флуид, неравномерне расподеле густине и деловања вискозних сила флуида. Потребно је одредити наступ природне конвекције у зони уз зид кутије и утицај резултујућег интензивирања хлађења флуида услед успостављања градијената температуре у истој зони на наступ термичке нестабилности природне конвекције. Режим првобитно успостављене конвекције најпре је ламинаран, а потом, у зависности од градијената температуре, може да пређе у турбулентну област, што доводи до интензивирања преноса топлоте и даљег хлађења флуида. Резултат је брзо приближавање температуре производа у зони поред зида температури површине зида.

Масени проток филма течности (слика 1) по метру ширине зида – густина сливања износи:

$$G = w_m \cdot e \cdot \rho \tag{1}$$

а меродавни Рејнолдсов број је дефинисан у облику:

$$Re = \frac{w_m \cdot e}{\nu} = \frac{G}{\mu}, \tag{2}$$

при чему је карактеристична дужина једнака дебљини филма течности. Критична вредност Рејнолдсовог броја по Бруеру [4] је $Re_{kr} = 400$.

При ламинарном струјању ($Re < 400$) Дарсијев коефицијент трења може да се напише у облику [1]:

$$\frac{\Delta p}{\frac{w_m^2}{2} \cdot \rho \cdot \frac{l}{e}} = \frac{6}{Re} = \lambda_{tr}, \tag{3}$$

па пад притиска услед трења при струјању филма течности низ раван зид износи:

$$\Delta\rho = \rho \cdot g \cdot h = \lambda_{tr} \cdot \frac{I}{e} \cdot \frac{w_m{}^2 \cdot \rho}{2}. \tag{4}$$

На основу (1−4), средња брзина и дебљина филма за вредности Re < 400 могу да се одреде из релација:

$$w_m = \left(\frac{G^2}{3 \cdot \mu \cdot \rho} \cdot \frac{h}{I} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{5}$$

$$e = \left(\frac{3 \cdot \mu \cdot G}{\rho^2 \cdot \frac{h}{I}} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{6}$$

При турбулентном режиму, Re > 400, изрази за Дарсијев коефицијент трења, средњу брзину и дебљину филма [1, 2] имају облик:

$$\lambda_{tr} = 0{,}165 \cdot Re^{-\frac{2}{5}} \qquad \text{за} \quad Re > 400 \tag{7}$$

$$w_m = 2{,}3 \cdot \left(\frac{\mu \cdot g^2}{\gamma} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot Re^{\frac{7}{15}}, \quad \text{за} \quad Re > 400 \tag{8}$$

$$e = 0{,}435 \cdot \left(\frac{\mu^2 \cdot g}{\gamma^2} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot Re^{\frac{8}{15}}, \quad \text{за} \quad Re > 400 \tag{9}$$

На основу топлотног биланса за елементарну дужину dh филма течности (слика 1):

$$G \cdot c_p \cdot dt = \alpha \cdot dh \cdot (t_z - t), \tag{10}$$

добија се израз:

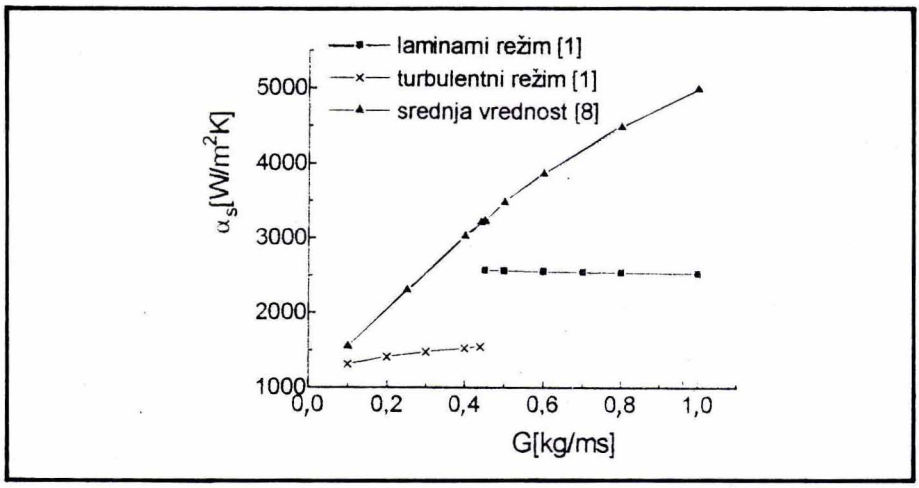
$$\frac{\alpha \cdot h}{G \cdot c_p} = \ln \frac{1}{1-\theta} \tag{11}$$

где је:

$$\theta = \frac{t_2 - t_1}{t_z - t_1} \tag{12}$$

Ако се претпостави да се температура зида не мења (t_z = const.), према [2] емпиријске једначине за одређивање θ имају облике:

$$\theta = 2{,}23 \cdot s^{0{,}656}, \text{ за } s < 0{,}05 \tag{13}$$



Слика 2. Коефицијент прелаза топлоте са стране филма течности у функцији протока G

$$\theta = 1 - 0{,}9101 \cdot \exp(-5{,}65 \cdot s), \text{ за } s > 0{,}05, \tag{14}$$

где је:

$$s = \frac{\lambda \cdot H}{3 \cdot e \cdot c_p \cdot G} = \frac{1}{3} \cdot \frac{h/e}{Re \cdot Pr}. \tag{15}$$

На основу једначина (10–14), Хофман [1] је предложио следеће изразе за прорачун коефицијента прелаза топлоте при струјању филма течности низ вертикални зид:

$$Nu = \frac{\alpha \cdot e}{\lambda} = 1{,}15 \cdot \left(\frac{h/e}{Re \cdot Pr}\right)^{-\frac{1}{3}}, \text{ за } \frac{h/e}{Re \cdot Pr} < 0{,}15 \tag{16}$$

односно:

$$Nu = \frac{\alpha \cdot e}{\lambda} = \frac{0{,}0942}{\frac{h/e}{Re \cdot Pr}} + 1{,}885, \quad \text{за } \frac{h/e}{Re \cdot Pr} > 0{,}15 \tag{17}$$

Гимбутис [8] је спровео експерименте са филмом течности која се слива низ вертикалну цев. Густина сливања течности мењала се у границама (0,6–7,5) kg/ms. На основу резултата испитивања за вредности $Re > 10^4$, предложен је следећи израз за одређивање Nusseltovog броја:

$$Nu = \frac{\alpha \cdot h}{\lambda} = \left(0{,}165 \cdot Re^{0{,}16} - 0{,}4\right) \cdot Pr_f^{\,0{,}34} \cdot \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0{,}25} \cdot \varepsilon, \tag{18}$$

где је Рејнолдсов број дефинисан као:

$$Re = \frac{w_m \cdot h}{\nu}$$

а поправни коефицијент ε дат је табеларно у [8] у зависности од Re и h.

Уколико се занемари термички отпор провођења хлађене течности*, проблем хлађења вертикалног зида се може дефинисати Newtonovim законом.

Количина топлоте која се размени између филма течности која струји са спољашње стране (вода) и течности која се хлади може се написати у облику:

$$dQ = -m \cdot c_p \cdot \frac{dt}{d\tau} = k \cdot A \cdot \left(t\left(\tau_{n-1}\right) - t_f \right). \tag{19}$$

Решавањем (19) добија се температура радне материје – хлађене течности:

$$t\left(\tau_n\right) = t_f + \left(t\left(\tau_{n-1}\right) - t_f \right) \cdot \exp\left(-\frac{k \cdot A \cdot \tau_n}{m \cdot c_p} \right), \tag{20}$$

при чему се средња температура израчунава из израза:

$$t_{sr}\left(\tau_n\right) = t_f + \frac{t\left(\tau_{n-1}\right) - t\left(\tau_n\right)}{\ln \dfrac{t\left(\tau_{n-1}\right) - t_f}{t\left(\tau_n\right) - t_f}}. \tag{21}$$

Критеријална једначина за одређивање коефицијента прелаза топлоте за природну конвекцију са унутрашње стране зида (у хлађеној течности) дата је у облику [6]:

$$Nu = C \cdot (Gr \cdot Pr)^z \tag{22}$$

при чему су C и z константе [6], а карактеристична геометријска величина зида дуж које се врши размена топлоте (h).

Користећи познате изразе за бездимензионалне критеријуме (Рејнолдсов, Прантлов и Грасхофов), могуће је израчунати вредност Нуселтовог броја за различите геометрије и услове размене топлоте, при чему су карактеристичне величине дефинисане следећим вредностима температура:

$\Delta t_u = t_{sr}(\tau_n) - t_z(\tau_n)$ – карактеристична температурска разлика,

---

* *Термички отпор провођењу хлађене течности је веома мали у односу на спољашње термичке отпоре.*

$t_{sr}(\tau_n)$ – средња температура радне материје,
$t_z\tau_n)$ – претпостављена температура унутрашње површине зида боце.

Пошто је коефицијент прелаза топлоте са унутрашње стране:

$$\alpha_u(\tau_n) = \frac{Nu \cdot \lambda_{rm}}{h}, \tag{23}$$

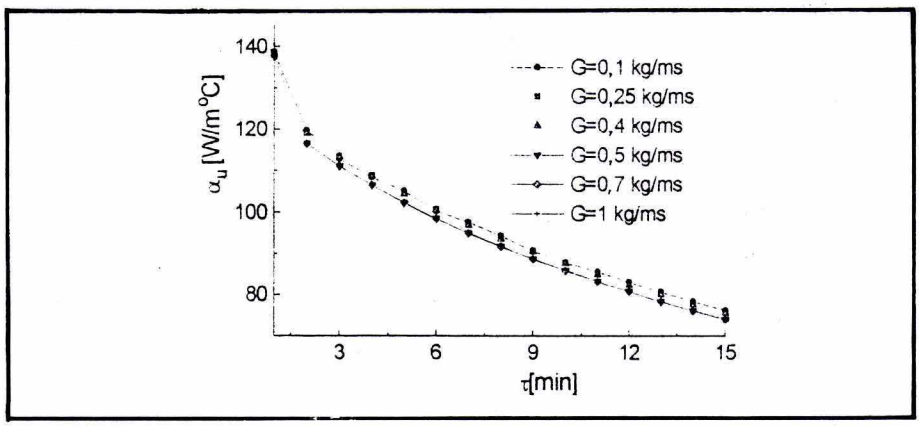
коефицијент пролаза топлоте кроз зид износи:

$$k(\tau_n) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_u(\tau_n)} + R_u + \frac{\delta}{\lambda} + R_s + \frac{1}{\alpha_s}}. \tag{24}$$

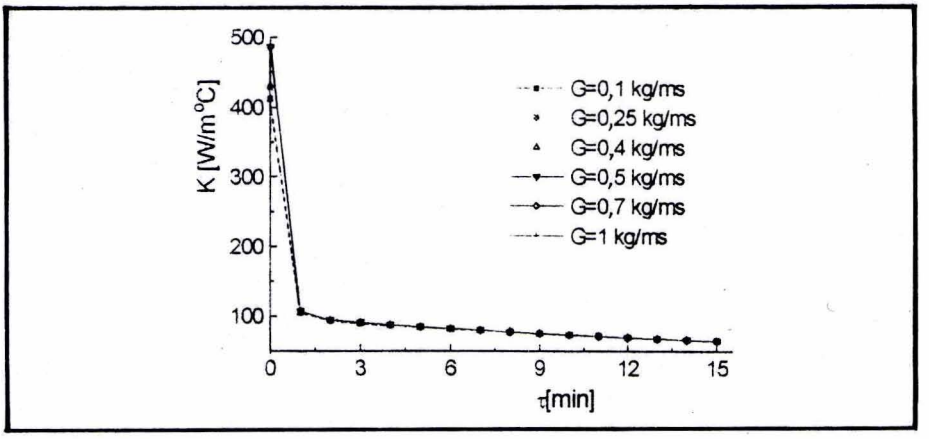
3. Симулација модела и анализа добијених резултата

Развијени модел примењен је на прорачун хлађења воћних сокова упакованих у амбалажу "пурепак", у облику паралелопипеда димензија 0,07 x 0,07 x 0,02 m. Коефицијент провођења топлоте и специфични топлотни капацитет усвојени су према [3], док су вредности осталих термофизичких особина претпостављене као за воду.

Временски период хлађења подељен је у 15 једноминутних интервала. На основу претпостављене температуре зида, једначинама (16 и 17 односно 22 и 23) израчунате су вредности коефицијента пролаза топлоте у n-том интервалу, а из из једначине биланса одређена средња температура хлађеног флуида на крају посматраног интервала.



Слика 3. Коефицијенти прелаза топлоте са стране хлађене течности у функцији времена

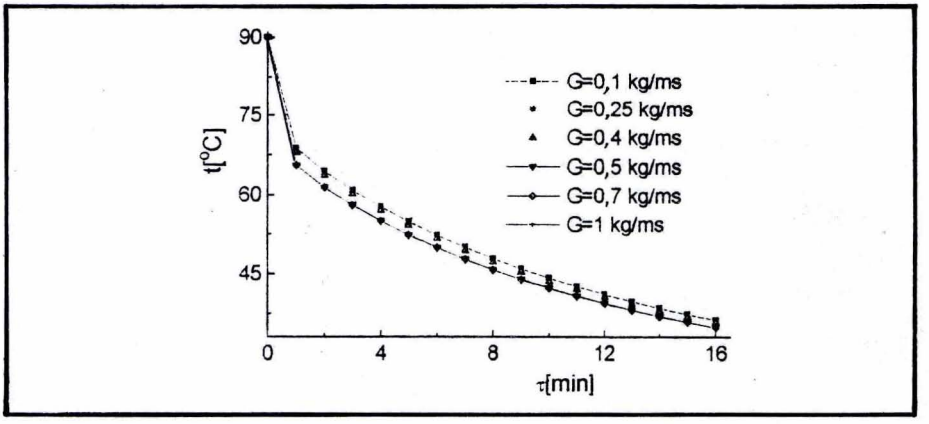


Слика 4. Коефицијент пролаза топлоте у функцији времена

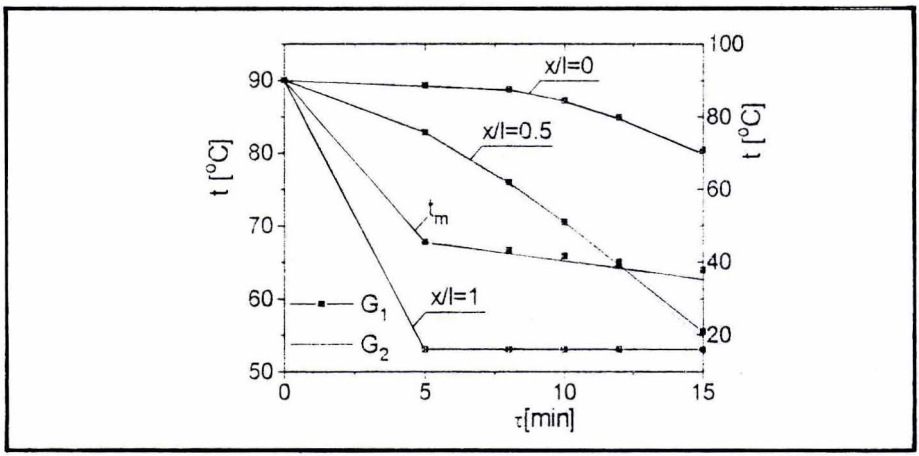
На слици 2 су вредности коефицијента прелаза топлоте са стране филма расхладне течности израчунате према изразима (16–18) у функцији густине сливања.

Коефицијент прелаза топлоте са стране хлађеног сока, рачунат према једначини (24) представљен је на дијаграму на слици 3. У току процеса хлађења, смањењем карактеристичне температурске разлике опада вредност коефицијента прелаза топлоте. Коефицијент пролаза топлоте (слика 4) показује квалитативно сличну промену.

Промена средње температуре хлађених флуида са временом прорачуната итеративним поступком уз помоћ описане процедуре приказана је на слици 5.



Слика 5. Промена средње температуре хлађене течности



Слика 6. Температура хлађене течности у функцији времена

На слици 6 је показана расподела температура у току времена у карактеристичним пресецима запремине, у којој се налази хлађена течност на основу математичког модела кондукције развијеног уз помоћ Фуријеових редова. Занемаривањем утицаја конвекције са унутрашње стране зида (што се у физичком смислу тешко може оправдати), одређена је "друга граница" температурског поља, насупрот решењу које се добија уз претпоставку "идеалног мешања" течности при хлађењу.

Закључак

Спроведеним прелиминарним испитивањима хлађења сока на већ изведеном објекту, показало се квалитативно слагање са наведеним прорачунима. Даље унапређење познавања процеса захтева даљи рад на математичком моделирању и експерименталном лабораторијском истраживању појава унутар затвореног хлађеног флуида. При томе, потребно је одговорити на низ питања у вези са наступом и стабилношћу природне конвекције у области уз зид, а посебно да ли долази и када до пригушења конвекције непосредно поред зида, као и који су још феномени преноса у унутрашњим слојевима затвореног флуида доминантни.

Ознаке

a (m^2/s)	– температурска проводљивост
c ($J/kg \cdot K$)	– масена специфична топлота
e (m)	– дебљина филма течности
G ($kg/m \cdot s$)	– масени проток по јединици ширине плоче низ коју струји флуид
h (m)	– висина плоче
k ($W/m^2 \cdot K$)	– коефицијент пролаза топлоте
l (m)	– карактеристична дужина

m (kg)	– маса
p (Pa)	– апсолутни притисак
Q (J)	– размењена количина топлоте
R ($m^2 \cdot K/W$)	– термички отпор услед запрљања зида
t (°C)	– температура
w (m/s)	– брзина струјања филма
α ($W/m^2 \cdot K$)	– коефицијент прелаза топлоте
β (K^{-1})	– коефицијент температурског ширења
γ (N/m^3)	– специфична тежина
δ (m)	– дебљина зида
λ ($W/m \cdot K$)	– термичка проводљивост
μ ($Pa \cdot s$)	– динамичка вискозност
ν (m^2/s)	– кинематичка вискозност
ρ (kg/m^3)	– густина
τ (s)	– време.

Коришћени бездимензионални критеријуми

$$Gr = \frac{\beta \cdot g \cdot h^3 \cdot \Delta t}{\nu^2}$$ – Грасхофов број

$$u = \frac{\alpha \cdot e}{\lambda}$$ – Нуселтов број

$$Pr = \frac{\nu}{a}$$ – Прантлов број

$$Re = \frac{w \cdot e}{\nu}$$ – Рејнолдсов број

Индекси

f	– флуид који струји низ плочу
kr	– критична вредност
m	– средња вредност
n	– временски тренутак
rm	– радна материја
s, u	– унутрашња, тј. спољашња страна
tr	– трење
z	– зид

Литература

[1] **Plank, R.**: *Handbuch der Kältetechnik*, dritter band, Springer–Verlag, Berlin, 1959.

[2] **Nusselt, W.**: *Der Wärmeaustaush am Berieselungskuler*, Z. VDI, Bb. 67, 1923.

[3] **Шамшаловић, С.**: *Технологија хлађења*, СМЕИТС, Београд, 1994.

[4] **Brauer, H.**: *Stromung und Warmeübergang bei Rieselfilmen*, VDI–Forsch, Heft, 457, VDI – Verlag, 1956.

[5] * * * : ASHRAE Handbook, *Refrigeration – Systems and Applications*, SI Edition, 1994.

[6] **Козић, Ђ., Васиљевић, Б., Бекавац, Б.**: *Приручник за термодинамику*, Машински факултет, Београд, 1994.

[7] **Тодоровић, Марија, Коси, Ф., Колцић, Г.**: *Главни машински пројекат инсталације за хлађење сока у "пурепак" амбалажи,* инвеститор "Воћарске плантаже", Болеч, Београд, 1996.

[8] **Gimbutis, G.**: *Heat Transfer in Film Heat Exchangers, Progress in Refrigeration Science and Technology*, Proceedings of the XIV International Congress of Refrigeration, Vol. 2, pg. (367–371), Moscow, 1978.