

Klasične analogije transporta količine toplote, supstancije i količine kretanja za slučaj strujanja fluida preko ravne ploče

Za inženjerske probleme zasnovane na strujanju fluida koji uključuju transport supstancije i toplote mogu se formirati analogije pomoću kojih se može opisati i uspešno savladati veliki broj problema. Analogija kao pojam označava sličnost, saobraznost i srazmeru. Postupci formulisanja problema, njihovog rešavanja do određene tačnosti i dalja kritička razmatranja o rešavanju novih problema istim ili sličnim tehnikama, principski čine analogiju. Suštinski je napredak uvek bio uočiti sličnost među raznorodnim fenomenima, te većina najranijih radova koji su se bavili teorijskim predviđanjem transporta toplote i/ili supstancije za slučaj laminarnog i turbulentnog strujanja nalazi glavni oslonac u korišćenju analogije između transporta toplote, količine kretanja i supstancije.

1 Uvod

Analogije transportnih fenomena mogu da budu veoma korisne, prvo za sagledavanje procesa transporta, a zatim i za predviđanje ponašanja sistema za koji imamo ograničene podatke. Pri tome, imperativ je prvenstveno teorijsko razumevanje transportnih fenomena i graničnog sloja. Važna metoda koja na osnovu teorije sličnosti omogućava rešavanje konkretnih inženjerskih problema je dimenzijska analiza tj. metod iznalaženja relacija od značaja bez potrebe za diferencijalnim relacijama, koje zahtevaju više resursa za rešavanje. Bezdimenzijski metod je u osnovi formulisanja transportnih analogija.

Osnovne prednosti analogija kao inženjerske prakse u inženjerstvu [1]:

- pristup definisanju određenih veličina pomoću analogija imaju teorijsku osnovu, što može dati veću pouzdanost u odnosu na empirijske izraze,
- lakše je i veća je tačnost merenja lokalne vremenski osrednjene brzine i napona smicanja u odnosu na merenje lokalne vremenski osrednjene temperature, koncentracije i toplotnog fluksa komponenti (na primer, da bi se dobio turbulentni Prandtlov broj za neku tačku strujnog polja potrebno je izmeriti turbulentni smicajni napon, turbulenti toplotni fluks, gradijente brzine i gradijente temperature. Teškoća preciznog merenja ove četiri veličine u jednoj tački je razlog za nepouzdanost eksperimentalne podatke [2]),
- u prošlosti je, dok nisu bili prisupačni računarski resursi, bilo od velike važnosti skraćenje CPU vremena numeričkih

proračuna i korišćenje memorijskog prostora računara kroz izvesna pojednostavljenja i generalizacije.

U ovom radu biće predstavljene analogije i njihov razvoj za slučaj strujanja fluida preko ravne polubeskonačne ploče.

2 Granični sloj i turbulencija

Pri istraživanju fenomena transporta količine kretanja, supstancije i količine toplote, koncept graničnog sloja je temelj na kome su analogije između procesa transporta i nastale. Gotovo sva strujanja koja se sreću u procesnom i termotehničkom inženjerstvu su turbulentna (u cevovodima, gasovodima, naftovodima, različitim vrstama razmenjivača toplote itd.). Za turbulentna strujanja konkretno važi da se izučavaju osrednjene i fluktuacione karakteristike strujnog toka, te je pri modeliranju izvršeno razlaganje hidrodinamičkog, temperaturskog i koncentracijskog polja na ova dva dela. Uticaj fluktuacionih karakteristika toka raste sa porastom brzine. Za praktične slučajeve, od interesa je ukupan efekat koji izaziva turbulentno strujanje, međutim u ovom radu biće pokazano kako se na osnovu turbulencije posmatraju pojave u graničnom sloju i van njega, za različite slučajeve postojećih analogija.

Radovi Ludviga Prandtla (*Ludwig Prandtl*) početkom 20. veka doveli su do važnog razgraničenja dela toka fluida koji se nalazi u blizini čvrste granice nazvanog granični sloj, gde su usled viskoznosti fluida dominantne viskozne sile dovoljno velike da omogućavaju samo laminarno kretanje, i na deo iznad graničnog sloja gde turbulentni efekti imaju primarnu ulogu na ponašanje toka fluida. To je dovelo do značajnog matematičkog uprošćenja problema, i time utro put za rešavanje problema strujanja analitičkim putem.

Modeliranje transportnih fenomena u blizini zida oslanja se na tri pristupa: analitički, numerički i heuristički [2]. Analitički pristup je prvi primenjivan i tu su efekti fluktuacija transportnih veličina usled turbulencije predstavljeni uvođenjem koncepta vrtložne difuzivnosti. Na tom osnovu su dalje uspostavljene važne analogne transportne relacije koje rezultiraju analitičkim rešenjima koeficijentata prenosa toplote i supstancije. Ovakav pristup modelira uticaj turbulentnih fluktuacija na stacionarni tok osnovne mase fluida kroz uticaj difuzije vrtloga u blizini zida. Numerički pristup fenomenološki je sličan jer ima istu osnovu pri modeliranju turbulencije (vrtložnu difuzivnost), ali koristi između ostalih i koncept Rejnoldsovih turbulentnih napona za zatvaranje sistema jednačina. Heuristički pristup baziran na pretpostavkama i empiriji, najviše se pojavljuje u radovima druge

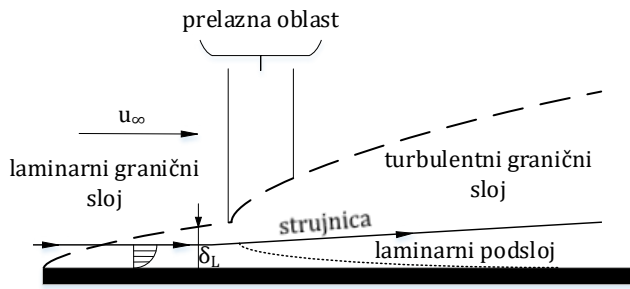
polovine 20. veka. Ovaj način zasnovan je na rešavanju transportnih jednačina u viskoznom području koje se kasnije povezuju sa jednačinama u kojima figurišu vrtložne difuzivnosti u turbulentnom području, da bi se dobili zakoni distribucije brzine, temperature i koncentracije.

Na slici 1. prikazano je formiranje dinamičkog graničnog sloja debljine δ_L njegove oblasti pri opstrujavanju ravne ploče fluidom koji se kreće brzinom u_∞ . Slučaj se posmatra kao dvodimenzionalni u pravougloj koordinatnom sistemu x-y.

Poprečni presek se deli u tri dela:

1. turbulentno jezgro, gde prevladuje vrtložni transport,
2. prelazni sloj, gde su prisutni molekularni i vrtložni transport,
3. laminarni i viskozni podsloj, gde prevladuje molekularni transport.

Turbulenti deo graničnog sloja ima tri podsloja: laminarni uz nepokretnu površinu, prelazni podsloj i turbulentni podsloj turbulentnog graničnog sloja. Ova tri sloja zbirno predstavljaju Univerzalni profil brzine.



Slika 1: Granični sloj za slučaj opstrujavanja ravne polubeskonačne ploče

Za slučaj stacionarnog strujanja fluida preko ravne ploče, Blazijus (Paul Richard Heinrich Blasius) je 1908. godine u svom radu dao analitičko rešenje jednačina kretanja (održanja mase i održanja količine kretanja) uz granične uslove ($u_x = u_y = 0$ na $y = 0$, i $u_x = u_\infty = 0$ na $y = \infty$). Uvodeći strujnu funkciju ψ , izvršeno je pojednostavljenje gde umesto dve nepoznate komponente brzine (u_x i u_y), sada postoji samo jedna, predstavljena strujnom funkcijom. Jednačina kretanja sa ravnomernom brzinom neporemećenog toka za stacionarni izobarski slučaj opstrujavanja ravne ploče nestišljivim fluidom, gde su u_x i u_y projekcije brzine u pravcima x i y, glasi:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (1)$$

Za iste uslove i konstantnu vrednost temperaturne provodljivosti a , jednačina održanja energije je:

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2)$$

Uvođenjem strujne funkcije jednačine se svode na jednu običnu nelinearnu diferencijalnu jednačinu. Rešavanjem numeričkim putem,

Blazijus je dobio tačno rešenje u okviru hidrodinamičkog graničnog sloja, za smicajni napon i koeficijent trenja u fluidu [3]:

$$\tau_0 = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} = \mu \cdot 0,332 \cdot u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \quad (3)$$

$$C_{fx} = \frac{\tau}{\rho u_\infty^2 / 2} = 0,664 \sqrt{\frac{\nu}{x u_\infty}} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \quad (4)$$

Gde su:

C_{fx} [-] - lokalni koeficijent trenja (u literaturi još nazvan *coefficient of skin friction*),

τ_0 [N/m²]- smicajni napon na površini ploče,

μ [Pa·s]- dinamička viskoznost fluida,

ν [m²/s] – kinematska viskoznost fluida.

Jednačina transporta supstancije za iste uslove i konstantan koeficijent molekularne difuzije D_{AB} je:

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} = D_{AB} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5)$$

Sličnost oblika jednačina govori o analogiji koja bi se mogla uspostaviti za dobijanje rešenja. Međutim pri njenom formulisanju mora da bude zadovoljeno da koeficijenti uz druge parcijalne izvode treba da budu isti, tačnije da je $Pr=1$ i $Sc=1$. Prantlov (Pr) broj takođe određuje odnos debljine dinamičkog (δ) i temperaturskog filma (δ_t), kao što je Šmitov (Sc) broj pokazatelj odnosa debljine dinamičkog (δ) i koncentracionog filma (δ_c). Granični uslovi za temperaturu treba da budu usklađeni sa onima za brzinu, što važi i za granične uslove za transport supstancije.

U većini slučajeva hidrodinamički granični sloj ima presudan utican na formiranje temperaturskog i koncentracionog graničnog sloja. Pri laminarnom strujanju najčešći slučaj je $\delta > \delta_t > \delta_c$, odnosno važiće $\nu > a > D_{AB}$ [4]. Po analogiji sa transportom toplote i količine kretanja, definiše se i granični sloj za transport supstancije, gde se takođe otpor transportu može smatrati da leži unutar difuzionog graničnog sloja. Ukoliko su koncentracijski gradijenti mali, sve moguće promene fizičkih svojstava fluida usled promene koncentracije mogu da se zanemare, te tako temperaturski i dinamički granični sloj u tom slučaju nisu pod uticajem transporta supstancije koji se odvija.

3 Model dužine mešanja

Prilikom laminarnog strujanja smicajni napon u fluidu nastaje kao rezultat nasumičnog molekularnog kretanja između dva sloja fluida. Doprinos turbulencije ukupnom transportu količine kretanja iskazuje se pomoću tzv. Rejnoldsovog napona, koji je fluktuirajuća komponenta smicajnog napona izražena kao $\rho u'_x u'_y$. Ukupni smicajni napon tada postaje:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du_x}{dy} - \rho u'_x u'_y \quad (6)$$

Analogijom sa Njutnovim (Newton) izrazom za viskost ($\tau = \mu (du_x/dy)$), Businessk (Joseph Valentin Boussinesq) je uveo pojam

vtložne viskoznosti (E), pa se Reynoldsov turbulentni napon može izraziti kao: $(\tau_{yx})_{turb} = E du_x/dy$.

Opis turbulentnog strujanja u okviru univerzalnog profila brzine došao je kao posledica hipoteze o dužini mešanja (mixing length). Ovaj koncept je razvijen od strane dva naučnika – Prandtla i Tejlora (*Geoffry Ingram Taylor*), kao dužina puta koju fluidni delić pređe pre nego što izgubi svoje prvobitne karakteristike i prilagodi se u potpunosti karakteristikama toka. Dužina mešanja je analogna konceptu srednjeg slobodnog puta molekula gasa, koji je prema kinetičkoj teoriji gasova, srednja udaljenost koju molekul pređe pre nego što se sudari sa drugim molekulom i izgubi svoje prvobitne karakteristike. Dužina mešanja može još da se definiše kao rastojanje između tačaka nastanka i nestanka vrtloga, a važnost u smislu analogija leži u tome što je i sama ova hipoteza nastala na osnovu sličnosti između mehanizma transporta količine kretanja pri turbulentnom i laminarnom toku.

Turbulentni smicajni napon i vrtložna viskoznost se izražavaju kao funkcija dužine mešanja. Predloženo je da je kinematska viskoznost vrtloga E , proporcionalna proizvodu vrtložne brzine u_E i dužine mešanja λ_E :

$$E \propto \lambda_E u_E \quad (7)$$

što je analogno kinematskoj viskoznosti μ/ρ za molekularni transport. Brzina se povećava kako se povećavaju dužina mešanja λ_E i gradijent brzine, pa je brzina proporcionalna:

$$u_E \propto \lambda_E \left| \frac{du_x}{dy} \right| \quad (8)$$

Objedinjujući izraze (7) i (8), u modelu mešanja predloženo je da se kinematska viskoznost vrtloga (E) se predstavlja jednačinom:

$$E = \lambda_E^2 \left| \frac{du_x}{dy} \right| \quad (9)$$

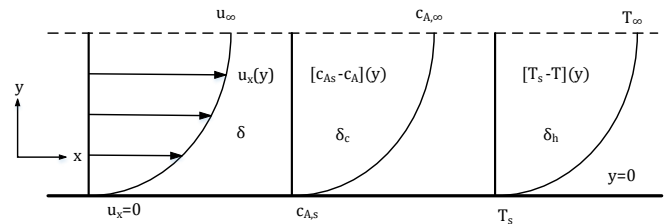
Ako postoji temperaturski gradijent unutar fluida, vrtlozi i vrtložna temperaturna provodljivost E_T će uticati na transport toplote. Budući da je mehanizam transporta toplote vrtložima u suštini isti kao i za transport količine kretanja, E_T je povezan sa dužinom mešanja i gradijentom brzine na isti način (9), što važi i za vrtložnu masenu difuzivnost (E_D). Turbulentni Prandtlov broj (Pr) je tada jednak odnosu E / E_T , dok je turbulentni Šmitov broj (Sc) jednak odnosu E / E_D .

4 Pregled analogija i uslova pod kojima su uspostavljane

Određeni uslovi koji pretpostavljaju postojanje sličnosti među fenomenima transporta i shodno tome predstavljaju zahteve za postojanje analogija su sledeći [3]:

- unutar posmatranog strujnog sistema ne postoji energijski ili supstancijalni izvor ili ponor,
- zanemarena je viskozna disipacija,
- profil brzine ne zavisi od transporta supstancije,
- ne postoji emisija ili apsorpcija energije zračenja,
- fizička svojstva fluida su konstantna, s tim da svakako dolazi do malih promena usled varijacija u temperaturi ili koncentraciji.

Krajem 19. veka mogućnost primene analogija prepoznat je radovima Reynoldsa (*Osborne Reynolds*). Ova analogija za cilj ima povezivanje procesa transporta toplote sa smicajnim naponom u fluidu, ali je takođe primenljiva za transport supstancije [5]. Na slici 2. prikazano je brzinsko, koncentraciono i temperaturno polje za tok fluida preko ravne ploče koji važe za opis Reynoldsove analogije.



Slika 2: Profili brzine, temperature i koncentracije – Reynoldsov pristup analogiji

Osnovna pretpostavka od koje je Reynolds pošao je da kada postoji jednakost relativnih raspodela brzine, temperature i koncentracije, može se uspostaviti analogija transportnih veličina [3]. Svojevremeno ovoj analogiji nastaloj analitičkim pristupom, je da nisu uzeta u obzir razmatranja laminarnog i prelaznog područja strujanja, već se pretpostavlja da je tok preko ravne ploče turbulentan (za opis strujanja u jednačinama figurišu kinematska viskoznost vrtloga, vrtložna temperaturna provodljivost i vrtložna difuzivnost). Suština Reynoldsovog postupka je da se na osnovu profila brzine odredi viskoznost vrtloga – (u literaturi “*eddy viscosity*”), za koju će da važi da je jednaka ili proporcionalna difuzivnosti vrtloga – (u literaturi “*eddy diffusivity*”). Na osnovu tog ulaznog podatka se integrale osnovne transportne jednačine za dobijanje temperaturnog i/ili koncentracionog polja. Reynolds je takođe pretpostavio da su turbulentne difuzivnosti količine kretanja, temperature i supstancije jednake za bilo koju tačku u fluidnoj struji.

Za isti Reynoldsov broj sa većim koeficijentom trenja postiže se i veći koeficijent prelaza toplote, zahvaljujući većoj turbulenciji, čime se ukazuje na sličnost različitih vrsta transporta. Jednačina koja je proistekla iz Reynoldsove analogije za potpuno razvijen turbulentni tok fluida preko ravne ploče je:

$$Nu = \frac{\xi}{8} \cdot Re \quad (10)$$

Analogno, za prenos supstancije važi:

$$Sh = \frac{\xi}{8} \cdot Re \quad (11)$$

Veza proistekla iz Reynoldsove analogije, koju definišu Nuseltov broj i koeficijent trenja (ξ) glasi:

$$\frac{Nu}{Re \cdot Pr} = \frac{\xi}{8} \quad (12)$$

Ova relacija omogućava utvrđivanje koeficijenta prelaza toplote za potpuno razvijeno turbulentno strujanje fluida preko ravne površine na osnovu poznate empirijske relacije za koeficijent trenja – $\xi(Re)$.

Reynolds je pretpostavio da su debljine hidrodinamičkog,

temperaturnog i difuzionog graničnog sloja jednake tj. da su Prandtl i Šmitov broj jednaki jedinici što je ujedno i ograničenje ove analogije – može se primenjivati za slučaj mnogih gasova, ali ne i za tečnosti. Rejnoldsova analogija predstavljala je odgovarajući okvir na osnovu kog će se kasnije razviti egzaktnije analogije.

U radu [6] Čilton i Kolburn su izvršili generalizaciju Rejnoldsove analogije, kojom se izbegava ograničenje da su brojevi Pr i Sc jednaki 1, izrazima:

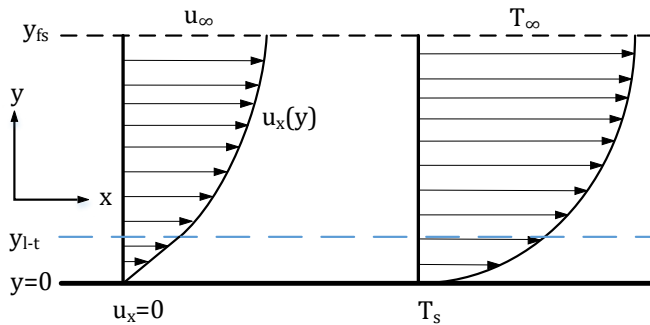
$$Nu = \frac{\xi}{8} \cdot Re \cdot Pr^{1/3} \quad (13)$$

$$Sh = \frac{\xi}{8} \cdot Re \cdot Sc^{1/3} \quad (14)$$

Dobijene jednačine jesu od praktičnog značaja kako za gasove tako i za tečnosti [7], za strujanje fluida preko ravne ploče, unutrašnja strujanja (u cevi) i poprečno nastrojavanje cevi. Istraživanje je primenjeno na širok opseg uslova različitih vrednosti protoka i tipova geometrije. Ovom analogijom proširen je opseg Prandltovog broja na $0,5 < Pr < 50$. Kolburnova analogija se još uobičajeno zapisuje tako da jedna jednačina povezuje tri transportne veličine u jedan izraz u kome figurišu tzv. *j*- faktori, za transport toplote (j_H) i supstancije (j_D):

$$j_H = j_D = \frac{C_f}{2} \quad (15)$$

Relacija (15) je tačna za slučaj strujanja fluida preko ravne ploče i zadovoljavajuća je za druge geometrije pod uslovom da nema otpora koji postoji usled oblika tela [3].



Slika 3: Profili brzine, temperature i koncentracije – Prandtl pristup analogiji

Dvojica naučnika Prandtl (*Ludwig Prandtl*) i Tejlor (*Geoffrey Ingram Taylor*) zasebno su modifikovali Rejnoldsovu analogiju u prvoj polovini 20. veka. Na slici 3. predstavljeno je brzinsko i temperaturno polje za tok fluida preko ravne zagrejene ploče. Suština ove analogije je u vezi između transportnih veličina postignutom kombinovanjem otpora koji dominantno podležu molekularnim efektima transporta u viskoznom podsloju (deo na slici 3. od $y=0$ do $y=y_{l-t}$), sa turbulentnim efektima u turbulentnom sloju. Ova analogija podrazumeva postojanje viskoznog podsloja, ali zanemaruje postojanje prelaznog podsloja.

Prandtl je raspodelu brzinskog profila u turbulentnom podsloju opisao koristeći koncept dužine mešanja. Takođe, kako bi se uzelo u

obzir različite karakteristike transporta toplote između turbulentnog sloja i laminarnog podsloja, pravi se razlika između molekularnog Prandltovog broja, kao fizičke karakteristike svakog fluida koja je konstantna i turbulentnog Prandltovog broja, koji zavisi od preovlađujućih uslova pri turbulentnom strujanju fluida definiše se kao odnos viskoznosti vrtloga i odgovarajuće vrtložne difuzivnosti ili u anglosaksonskoj literaturi nazvanom još vrtložna konduktivnost (“*eddy conductivity*”).

Raspodela brzinskog polja je sledeća [7]:

- linearna za $0 \leq y \leq y_{l-t}$ i opisana sa: $u^+ = y^+$, $0 \leq y^+ \leq 11,6$
- logaritamska u području turbulentnog toka $y_{l-t} \leq y \leq y_{fs}$ i opisana sa: $u^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5$, $y^+ > 11,6$,
- dalje od granice y_{fs} brzina fluida je konstantna i jednaka brzini slobodnog toka,

fs – free stream = osnovna masa fluida,

gde su bezdimenziona brzina u^+ i koordinata y^+ predstavljene sa:

$$u^+ = \frac{u_x}{u_\tau} = \frac{u_x / u_{x,\infty}}{\sqrt{\xi/8}} \quad (16)$$

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} = \frac{y \sqrt{\tau_s / \rho}}{\nu} = \frac{y u_{x,\infty} \sqrt{\xi/8}}{\nu} \quad (17)$$

Raspodela brzina u blizini zida se u praksi uobičajeno predstavlja kao funkcija bezdimenzionih koordinata, a uvodi se takođe i tzv. “brzina trenja” (*friction velocity*) predstavljena kao: $u_\tau = \sqrt{\tau_s / \rho}$.

Kada molekularni i vrtložni transport imaju značajan doprinos za transport energije i supstancije, njihovi su efekti aditivni, pa se transportne jednačine dopunjavaju tako da uključe turbulentne efekte preko kinematske viskoznosti vrtloga, vrtložne temperaturne provodljivosti i vrtložne difuzivnosti. Smicajni napon u graničnom sloju je dat Njutnovim zakonom:

$$\tau = -\left(\frac{\mu}{\rho} + E\right) \frac{d(\rho u_x)}{dy} = -\mu \frac{du_x}{dy} - \lambda_E^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 \quad (21)$$

Toplotni fluks kroz granični sloj izražen Furijeovim zakonom:

$$q_y = -\left(\frac{\lambda}{c_p \rho} + E_t\right) \frac{d(\rho c_p T)}{dy} = -k \frac{dT}{dy} - \lambda_E^2 \rho c_p \left(\frac{du_x}{dy}\right) \left(\frac{dT}{dy}\right) \quad (22)$$

Fluks supstancije dat je Fikovim zakonom:

$$N_A = -(D + E_D) \frac{d(c_A)}{dy} = -D \frac{dc_A}{dy} - \lambda_E^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right) \left(\frac{dc_A}{dy}\right) \quad (23)$$

Kombinacijom transportnih izraza jednačina sa poštovanjem Prandltovog profila brzine za oblast graničnog sloja dobija se:

za transport toplote

$$Nu = \frac{\xi/8 Re Pr}{1 + 5\sqrt{\xi/8} (Pr - 1)} \quad (24)$$

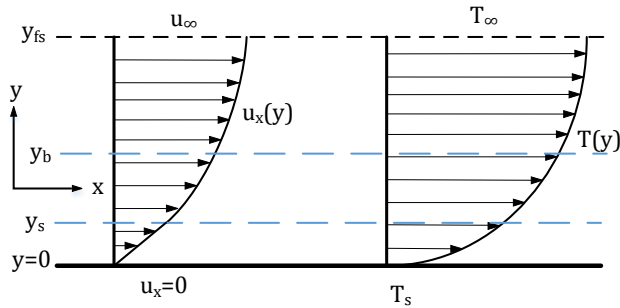
za transport supstancije

$$Sh = \frac{(\xi/8) Re Sc}{1 + 5\sqrt{\xi/8} (Sc - 1)} \quad (25)$$

Slično kao Prandtl i Tejlor, Fon Karman (*Theodore von Kármán*)

je svoju transportnu analogiju zasnovao na turbulentnoj difuzivnosti, s tim što se u ovom slučaju uzima u razmatranje i prelazni podsloj. Napredak u odnosu na prethodnu analogiju se ogleda u činjenici da ne postoji toliko izražen diskontinuitet kakav se sreće na granici između laminarnog i turbulentnog dela toka, jer je realna situacija da usled turbulencije neki fluidni delići prodiru u viskozni podsloj i povremeno ga remete.

Prema ovoj analogiji granični sloj je podeljen u tri dela koji su predstavljani na slici 4 [7]:



Slika 4: Profili brzine, temperature i koncentracije – Fon Karmanov pristup analogiji

1. laminarni podsloj, koji se graniči sa čvrstim telom, u oblasti $0 \leq y \leq y_s$ sa lineanom raspodelom brzine $u^+ = y^+$, $0 \leq y^+ \leq 5$
2. prelazni podsloj $y_s \leq y \leq y_b$,

$$u^+ = 5 \ln \left(\frac{y^+}{5} \right) + 5 = 5 \ln y^+ - 3,05, \quad 5 < y^+ \leq 30$$

3. turbulenti podsloj (turbulentno jezgro) $y > y_b$ sa sledećom funkcijom koja reprezentuje raspodelu: $u^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5$, $y^+ > 30$

Fon Karmanova analogija dala je sledeće jednačine proistekle iz transportnih jednačina:

$$Nu = \frac{(\xi/8) Re Pr}{\left[1 + 5\sqrt{\xi/8} \{ Pr - 1 + Pr \ln [(5Pr+1)/6] \} \right]} \quad (26)$$

$$Sh = \frac{(\xi/8) Re Sc}{\left[1 + 5\sqrt{\xi/8} \{ Sc - 1 + \ln [(5Pr+1)/6] \} \right]} \quad (27)$$

5 Ocene klasičnih analogija

Za Rejnoldsovu analogiju važi da su turbulenti procesi transporta dominantni (takođe veličine koje ih opisuju tj. turbulente difuzivnosti su jednake u svakoj tački toka) i da se molekularni transport može zanemariti. Pretpostavka da je do same čvrste granice potpuna turbulencija, rezultira neutemeljenim ponašanjem toka fluida kao i nerealnim transportnim procesima (koji za Prandtlov broj veći od jedinice daju neutemeljena rešenja).

Prandtlovim uvođenjem laminarnog podsloja, razdvojene su oblasti u kojima važi Rejnoldsova analogija tj. oblast opisana isključivo turbulencijom i oblast gde se transport isključivo odvija molekularnim putem. Međutim, postoji značajan diskontinuitet pri prelasku iz jednog sloja u drugi koji nije realan ishod dešavanja u

stvarnom toku fluida preko čvrste granice. Takođe, viskozni podsloj se smatra da je konstantne debljine, nezavisne od Rejnoldsovog i Prandtlovog broja.

Kada se govori o Fon Karmanovoj analogiji, treba napomenuti da se u laminarnom podsloju transportne pojave odvijaju samo na osnovu molekularne difuzije (kao i kod Prandtlove), zatim su pretpostavljene fiksne granice između laminarnog i prelaznog podsloja nezavisne od Rejnoldsovog i Prandtlovog broja, i na kraju, vrtložne difuzivnosti količine kretanja i temperature su smatrane jednakim, što ograničava primenu analogija na uski opseg Prandtlovog i Šmitovog broja [2].

Dobijena jednačina Čilton - Kolburnove analogije je empirijska, što ukazuje da prethodne analogije nisu uspele da predvide eksponent koji je uveden, jer su zanemarile turbulenti transport u laminarnom podsloju i striktno granice između slojeva.

Čerčil (*Stuart Churchill*) u svom radu [1] ddaje kritički osvrt na klasične analogije transporta toplote i supstance. Konkretno za slučaj strujanja fluida preko ravne ploče navodi da, koristeći ovde predstavljene osnovne analogije, prave se funkcionalne i numeričke greške u proračunima, nastale zanemarivanjem varijacija toplotnog fluksa i molekularnog kretanja u blizini čvrste granice i u osnovnom toku fluida. Svoje istraživanje Rejnoldsova analogija zasniva na tačnim integralnim rešenjima i nalazi da za slučaj ravne ploče Rejnoldsova analogija nije validna za Prandtlov broj jednak jedinici, već za $Pr=0,86$. Takođe, kritika se odnosi na Čilton – Kolburnovu analogiju, gde autor otkriva da je Nuseltov broj proporcionalan $Re \cdot (C_f/2)^2$, a ne $Re \cdot (C_f/2)$. Autor navodi da Prandtl-Tejlorova i Fon Karmanova analogija pokazuju značajne greške za velike vrednosti Prandtlovog broja zbog zanemarivanja kombinacije molekularnog i turbulentnog transporta u blizini zida pri izvođenju.

U radu [8] pokazano je da je Rejnoldsova analogija odgovarajuća za turbulentni tok fluida preko ravne ploče za vrednost $Pr < 1$, Čilton – Kolburnova analogija je odgovarajuća za uslove konstantne temperature ploče, za laminarni tok i za vrednost Prandtlovog broja $Pr > 1$. Rad [9] bazira se na direktnom modeliranju zasnovanom na vremenski osrednjenom lokalnom turbulentnom naponu smicanja i gustine toplotnog fluksa, izbegavajući tako nedostatke modeliranja vrtložne viskoznosti, vrtložne provodnosti i dužine mešanja.

6 Zaključak

U radu su predstavljene osnovne (klasične) analogije transportnih fenomena za slučaj stacionarnog, ravanskog, viskozno, nestišljivog strujanja fluida preko ravne polubeskonačne ploče. Istorijska uloga ovih analogija je veoma značajna, pre svega u smislu sagledavanja, razumevanja i razvoja uticaja turbulentnih procesa u fluidu na transportne procese. Fundamentalnost prvih analogija pretpostavlja njihovu pogodnu ulogu za sticanje znanja mlađih naraštaja koji stasavaju u inženjere o transportnim fenomenima.

Literatura

- [1] Churchill W.S., *Critique of the Classical Algebraic Analogies between Heat, Mass, and Momentum Transfer*, Ind. Eng. Chem. Res. 1997, 36, 3866-3878
- [2] Thakre S.S, J.B. Joshi, *Momentum, mass and heat transfer in single-phase turbulent flow*, Reviews in Chemical Engineering, Vol.

18, Nos. 2-3, 2002

[3] **James Welty, Gregory L. Rorrer, David G. Foster**, *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer* (2020, Wiley)

[4] **Schlichting, H., & Gersten, K.**, *Boundary-layer theory*, 9th Ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2017,

[5] **Reynolds, O.** (1874). *On the extent and action of the heating surface for steam boilers*, Proceedings of the Literary and Philosophical Society, vol. 14, pp. 7–12, 1874

[6] **Chilton T. H., Colburn A. P.**, *Mass Transfer (Absorption) Coefficients Prediction from Data on Heat Transfer and Fluid Friction*, Industrial & Engineering Chemistry, vol. 26, pp. 1183, 1934.

[7] **Dawid Taler**, *Numerical Modelling and Experimental Testing of Heat Exchangers*, vol. 161, Springer, 2019

[8] **Siddiqui O., Shuja S.Z., Zubair S. M.**, *Assessment of thermo-fluid analogies for different flow configurations: the effect of Prandtl number, and laminar-to-turbulent flow regimes*, International Journal of Thermal Sciences vol.129, pp.145–170, 2018

Autori

Milica IVANOVIĆ, mast. inž. maš.
Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet

Nova generacija Grundfos CR pumpi

REŠENJA KOJA POMERAJU GRANICE

Nova Grundfos CR pumpa pomera granice višestepenih pumpi.

Grundfos CR pumpa ima maksimalno poboljšanu energetska efikasnost, a maksimalni radni pritisak na standardnim pumpama je povećan na 40 bara. Sa svojim novim veličinama protoka do 320 m³/h, Grundfos CR otvara čitav novi svet mogućnosti za inline vertikalne višestepene pumpe.

Pogledajte više o Grundfos CR pumpama na www.grundfos.rs/cr

Grundfos Srbija d.o.o.
Omladinskih brigada 90v
11070 Novi Beograd
+381112258740

GRUNDFOS 

Possibility in every drop